G. Loria, Luigi Cremona et son oeuvre mathématique, *Bibliotheca Mathematica,* (3), 5, 1904, pp. 125-195

Luigi Cremona et son œuvre mathématique.

Par GINO LORIA à Genova.

Avec un portrait en phototypie comme frontispice.

Table.

All' alta impresa caritade sprona.
PETRARCA.

1. Enfance et jeunesse.[1])

Le grand géomètre, dont aujourd'hui on pleure la perte irréparable, appartint à une famille distinguée originaire de Novare qui jouit d'une

---

1) Pour rédiger la partie biographique du présent travail, des notes écrites par Mme ITALA COZZOLINO-CREMONA (fille de l'illustre géomètre) m'ont été d'un très grand secours. M. L. BERZOLARI a eu la bonté de faire à ma prière des recherches dans les archives de l'université et du gymnase de Pavie et de mettre à ma disposition leurs remarquables résultats. MM. E. BERTINI et MISANI m'ont encore fourni des renseignements précieux. Que tous reçoivent mes remercîments les plus sincères. La belle *Commemorazione del socio* LUIGI CREMONA, faite par M. VERONESE à l'académie des „Lincei" le 6 décembre 1903, quoique arrivée lorsque mon travail était fini, m'a servi pour ajouter ou corriger quelques détails.

considérable aisance à une époque pas très éloignée de nous. Sa grand'mère (MARGHERITA FERRARI CREMONA), veuve très jeune et animée de goûts dépensiers, fut la cause principale des revers de fortune de la famille. Quand en 1770 le père du grand homme (GAUDENZIO) vint au monde, le bien paternel était dilapidé; mais, malheureusement il était aussi par nature porté à la dépense, et ne sut pas donner l'énergique coup de barre indispensable pour sauver le bateau du naufrage. A l'age de 25 ans, ayant obtenue à Pavie le degré de docteur en droit, il épousa CATERINA CARNERALI, qui lui donna trois enfants: JOSEPH, JEAN et JEANNE; l'ainé s'établit à Venise et y devint avocat distingué; JEAN, fut maître des comptes; et la jeune fille épousa à Groppello G. B. MAGENTA. En 1818 GAUDENZIO CREMONA fut obligé de quitter Milan, où il était établi pour subvenir à sa famille; et il accepta alors un emploi très humble à la délégation autrichienne de Pavie. Resté veuf, il se maria une seconde fois le 28 novembre 1829; et bien qu'il compta plus que 59 ans, il choisit comme compagne une jeune femme qui n'en comptait que 20. De ce nouveau mariage quatre autres fils naquirent, savoir: le 7 décembre 1830, dans la maison qui porte aujourd'hui le numéro 8 dans la rue Severino Boezio, ANTONIO LUIGI GAUDENZIO GIUSEPPE, celui qui devait acquérir une renommée éternelle dans le champ scientifique au nom de CREMONA; deux ans après PIETRO, mort en 1855, encore étudiant en mathématiques, d'une pthisie pulmonaire qu'il tenait de sa mère; après FRANCESCA, morte à dix ans, victime de la même maladie; et enfin le 10 avril 1837, TRANQUILLO, le futur grand peintre, mort à Milan le 10 juin 1878.

Le second mariage de GAUDENZIO CREMONA, pour des raisons qu'il est facile de comprendre, fut désapprouvé et combattu par les fils du premier lit; toutefois le fils GIUSEPPE ne se refusait pas de secourir souvent une famille qu'il reconnaissait digne non seulement de compassion, mais aussi de la plus haute éstime. Et ces secours devinrent tout-à-fait indispensables, lorsque en 1841 le père CREMONA, à la suite d'une malheureuse chute, fut obligé de garder le lit et mourut au bout d'une année, laissant une veuve qui, à 30 ans et avec une petite pension pour unique ressource, devait toute seule entretenir et élever quatre enfants, dont le plus grand n'avait pas plus de onze ans.

L'émouvant spectacle de la lutte quotidienne, que devait soutenir cette jeune mère et qu'elle soutenait avec une noble et sereine fierté, aura sans doute exercé une influence bienfaisante sur LUIGI CREMONA et contribué puissament à façonner son caractère irréprochable et ferme; on peut dire en effet que dans toute son existence est fidèlement réfléchie l'image de la physionomie morale de sa vénérée mère. A la mort de son père il suivait le dernier cours du gymnase; désirant hâter le jour où il pourrait être utile à sa famille, il redoubla d'ardeur et d'activité à l'étude, de telle sorte que durant les classes secondaires il obtint la note „éminent“ dans toutes les matières et fut toujours le premier de ses condisciples. Pendant son cours „philosophique“ (j'emploie la nomenclature officielle de l'époque) il sentit toujours un grand penchant pour les lettres; c'est ainsi que non seulement se forma cet admirable style que tous les mathématiciens connaissent, mais en même temps il se familiarisa avec le Latin et le Grec presque autant qu'avec l'Italien. Il est bon ici de remarquer qu'il resta, plus âgé, ce qu'il avait été plus jeune: en effet, lorsqu'en 1901 on discuta encore une fois en Italie la suppression du Grec du programme de l'enseignement classique, il se mit du côté des conservateurs, soutenant publiquement que „la vera scuola classica, col latino e col greco, deve rimanere intatta; e tale rimanendo, sarà sempre la scuola preferita dalle intelligenze elette“.[1])

Les héros d'HOMÈRE et de VIRGILE enflammaient le jeune CREMONA d'amour pour sa pauvre patrie, qui était alors profondément agitée par ce grand mouvement révolutionnaire qui, préparant la glorieuse année 1848, mettait en effervescence toute la jeunesse studieuse aux universités de Pavie et de Padoue. Si l'on considère encore que parmi les condisciples du futur savant se trouvaient ENRICO et GIOVANNI CAIROLI et qu'il passait à Groppello toutes ses vacances avec les deux frères aînées BENEDETTO et ERNESTO, on ne s'étonnera pas d'apprendre que, lorsque le bataillon „Italia libera“, formé de 160 étudiants napolitains allant combattre l'Autriche, traversa Pavie, il abandonna la maison maternelle pour les suivre „senza rimorso (écrivait-il) perchè avrei creduto di mancare ai dettami della più santa delle religioni e di commettere un atto di viltà e inettitudine ricusando di dare il sangue per la patria“. A peu de jours de là, un autre futur grand mathématicien, ENRICO BETTI, se battait à Curtatone (tout près de Mantoue) sous le commandement de O. F. MOSSOTTI, le célèbre professeur de physique mathématique.

Le bataillon où CREMONA avait pris le service, alla le 12 avril 1848 à Ferrare pour rejoindre le général piemontais DURANDO; celui-ci le dirigea tout de suite sur Polesella et de là, par une marche très fatigante, à Trévise, sous la conduite du capitaine MAURO. C'était toujours avec une émotion grande et profonde que l'obscur jeune homme, devenu une des gloires d'Italie, racontait les épisodes de la guerre à laquelle il prit part, les attaques contre les Autrichiens à Nevesa sur le Piave, le siège de Trévise et particulièrement l'énergique défense du rempart voisin de la porte St. Thomas; „in quel giorno (il disait) sparavamo tanto e cosi serrato che

1) Voir une lettre à M. RAMORINO, datée „Vallombrosa, 29 Luglio 1901“ et insérée dans le cahier d'août 1901 de la revue Atene e Roma, publiée à Florence.

uno squadrone di cavalleria nemmeno non potè avanzarsi". Son courage et son activité lui valurent sa nomination de caporal, bientôt suivie de celle de sergeant.

Toute résistance étant désormais inutile en campagne ouverte contre un ennemi extrêmement nombreux, le bataillon „Italia libera" courut au secours de Venise qui, par un siège célèbre, retardait l'heure suprême d'une capitulation inévitable. L. Cremona, arrivé à Venise, se rendit à la maison de son frère aîné Giuseppe, plutôt pour avoir des nouvelles de sa pauvre mère que pour lui demander des secours; et après une courte réprimande pour son escapade, son frère, qui était au fond très fier des exploits d'un membre de sa famille, mit à sa disposition sa maison et sa table pour tout le temps de son séjour à Venise. Mais la légion „Italia libera" fut bientôt envoyée à Chioggia (fort de Brondolo), puis à la défense du fort de Marghera. L. Cremona joua un rôle si actif dans cette défense mémorable, que le capitaine Mauro le montrait aux soldats comme un modèle de vertus civiles et militaires à cause de son courage, de son intelligence, de sa discipline et de sa probité. On sait que cette défense ne finit que lorsqu'un amoncellement de ruines marqua la place du fort de Marghera. Alors la compagnie à laquelle appartenait notre héros, se retira à Venise, où, bien que persécutée par le choléra et par une affreuse disette, elle coopéra à la défense acharnée du pont qui traverse la Lagune. Mais malgré l'héroïsme sans pareil de toute la population, le triste aube du 24 août 1849, la dernière de l'indépendance vénetienne, finit par paraître. Et Cremona eut au moins une dernière suprême consolation, celle que les débris de l'armée nationale purent défiler avec tous les honneurs des armes, les drapeaux déployés et les tambours battants, devant les généraux autrichiens ébahis en voyant que c'était un petit corps de recrues pâles et décharnées, mal vêtues et à peine chaussées, qui avait tenu en échec pendant plusieurs mois une armée entière de vétérans consommés dans toutes les ruses de la guerre.

2. Études universitaires. Premières publications.

Sans ressources financières, fatigué et malade, Luigi Cremona reprit tristement la route de Pavie, accablé par le chagrin de voir qu'après tant de sang versé, sa chère patrie était toujours esclave. Mais sur le seuil de la porte de sa maison une nouvelle et plus grande douleur l'attendait; sa pauvre mère était morte depuis quelque mois. En présence de la désolation du présent, de l'incertitude de l'avenir et des graves responsabilités qui pesaient sur lui, il ne se perdit pas d'esprit, mais il comprit que c'etait le moment de se montrer à la hauteur de la charge que le destin semblait lui avoir confiée. Remis qu'il fut d'une attaque de fièvre typhoïde, dont il avait apporté les germes de Venise, il reprit avec ardeur les études qu'il avait interrompues, et le 27 novembre 1849 il obtient ce degré qu'on appelait alors „assolutoria negli studi filosofici". En conséquence, dans les années suivantes il put suivre dans l'université de Pavie les cours d'ingénieur civil sous la direction de A. BORDONI[1]), A. GABBA[2]), et un peu plus tard de F. BRIOSCHI[3]). Les 5 janvier, 5 mars et 6 mai 1853 il fut admis à subir les „examens de rigueur"[4]) en obtenant dans chacun et par tous les examinateurs (parmi lesquels se trouvait toujours BORDONI et dans les deux premieurs aussi BRIOSCHI) le certificat „valde

1) Quoique à cette époque BORDONI eût déjà dû abandonner la chaire de calcul infinitésimal pour celle de géodésie élémentaire, toutefois, comme directeur des études mathématiques dans la faculté de sciences, il n'avait cessé d'exercer une influence prépondérante.

2) Ce professeur de géométrie supérieure est cité avec reconnaissance par CREMONA dans une *Prolusione* dont nous parlerons un peu plus bas.

3) En plusieurs occasions CREMONA a déclaré ses dettes de reconnaissance envers BRIOSCHI; d'abord dans la *Prolusione* citée tout-à-l'heure, où il donne „testimonianza di gratitudine all'illustre BRIOSCHI, al quale devo tutto quello che per avventura non ignoro"; plus tard, en 1878, ayant été invité à participer aux fêtes commemoratives du 25e anniversaire de la fondation du polytechnicum de Milan, il écrivit une lettre où l'on lit les phrases suivantes: «FRANCESCO BRIOSCHI cominciò ad essermi maestro quando io ne seguii le lezioni di meccanica nell' anno 1851—1852; ma quelle lezioni comunque ricchissime di contenuto non furono se non la parte minima di istruzione matematica onde mi sento a lui debitore. Egli continuò ad assistermi con insegnamenti in privato e con consigli nei successivi anni che passai in Pavia, cioè sino al 1857, mi iniziò allo studio delle funzioni ellittiche ed abeliane e alle opere magistrali di ABEL e JACOBI. Non esagero affermando che il BRIOSCHI mi communicò il sacro fuoco ond'egli stesso ardeva e mi dischiuse per primo gl'infiniti orizzonti dell' alta matematica. Quando io lasciai Pavia già cominciavo a sapere studiare e lavorare da me, ma di ciò era pur sempre debitore all' esempio del maestro. Ne' primi tempi ebbi degli scorraggiamenti, ma bastò una sua lettera a dissiparli e d'allora in poi mi crebbero sempre più le forze ed il coraggio. Vero è che i miei studi personali presero ben presto altro indirizzo; mi presi d'amore per la geometria, mentre BRIOSCHI mi aveva avviato per l'analisi. Ma la scienza è una sola; ed è l'analisi che prima mi aveva dato le armi necessarie per penetrare nei misteri della sintesi geometrica . . . Gli anni che passai con BRIOSCHI, come scolaro e poi collega nell' insegnamento, sono gran parte della mia vita; nei primi imparai ad amare la scienza, negli altri poi a trasfonderla in un grande cerchio di uditori. La memoria degli uni e degli altri è un vincolo di affetto, di ammirazione e di gratitudine che mi unisce à BRIOSCHI».

4) Voici les matières sur lesquelles eurent lieu ces examens:

1. Introduction aux mathématiques supérieures. Géodésie et hydrométrie. Économie rurale. Histoire naturelle en général. Dessin géométrique.
2. Calcul différentiel et intégral. Architecture civile; dessin relatif. Géométrie descriptive.
3. Mathématiques appliquées. Architecture hydraulique. Dessin de machines et d'architecture. Législation.

bene", et il fut déclaré ensuite „approbatus p. unanimia cum applausum". Un décret du 9 mai 1853 l'appela à soutenir le jour suivant la discussion publique pour avoir le degré académique de „docteur dans les études d'ingénieur civil et architecte"; ce degré lui fut aussi accordé à l'université et avec acclamation. [1])

Parmi les compagnons d'armes que CREMONA eut dans le cours de sa glorieuse campagne, il distingua NICOLA FERRARI, jeune génois ami et admirateur de MAZZINI.[2]) FERRARI était républicain et CREMONA monarchiste; toutefois ils tombaient toujours d'accord dans leur aspiration finale: l'unité de l'Italie et son affranchissement. NICOLA lisait souvent à son ami les lettres, frémissantes de patriotisme, que lui écrivait sa soeur ELISE, alors directrice de l'asile des enfants de Gênes.[3]) Et CREMONA découvrit, à travers ces lettres, la femme digne de devenir sa compagne pour la vie; personnellement il fit sa connaissance à Gênes en 1853, mais elle devint sa femme seulement le 4 août de l'année suivante; à cause du choléra qui sévissait alors sur Gênes, le mariage eut lieu à Groppello dans la maison MAGENTA. D'après la déclaration de CREMONA lui-même[4]), sa femme le conseilla dans toutes les circonstances difficiles de sa vie et toujours sagement; se chargeant de tous les soins domestiques et de l'éducation de ses fils, elle lui a rendu possible le travail continuel et fécond. Elle fut le bon génie de toute sa famille jusqu'au

---

1) La discussion de doctorat devait se faire sur une des quatre thèses suivantes proposées du candidat:

1. *Mathématiques appliquées:* Lorsqu'on connaît le mouvement du couple de moment *minimum* d'un système invariable de forces dans l'espace, on peut déterminer par une simple construction graphique les moments des couples résultants et composants par rapport à tous les points de l'espace.
2. *Géodésie:* Si toutes les droites tracées sur une feuille de papier restent droites après que cette feuille a été pliée, il existe une relation du premier degré entre les coordonnées d'un point quelconque dans les deux positions.
3. *Géométrie descriptive:* Deux diamètres conjugués de l'ellipse perspective d'une autre sont la perspective du diamètre de l'ellipse objective conjugué à ses cordes parallèles à la trace de son plan sur le tableau et la perspective d'une de ces cordes.
4. *Dessin géométrique:* Les problèmes d'un degré supérieur au second ne peuvent pas se résoudre tous géométriquement par le seul emploi de la règle et du compas.

CREMONA choisit le 1er sujet.

2) N. FERRARI mourut jeune et sur sa tombe le grand agitateur écrivit, sous la forme d'une lettre à la soeur d'un décédé, un éloge splendide qui a été publiée. Voir: B. ACQUARONE, *Ricordo di ELISA FERRARI-CREMONA* (Siena, Poggibonsi 1884).

3) Voir: SOFIA ALBINI, *In memoriam* (16 settembre 1882).

4) Voir l'opuscule précité de B. ACQUARONE et une lettre à M. BERTINI, publiée partiellement par M. VERONESE dans sa *Commemorazione*.

16 juillet 1882, où elle mourut serainement à Rome; elle mérite ainsi une place d'honneur dans la biographie de son célèbre mari.

Les premières années du mariage de CREMONA furent une époque de souffrances et de luttes continuelles; le gouvernement autrichien n'étant pas disposé à donner une place dans l'instruction publique à l'ancien défenseur de Venise, il dut se résigner à accepter des répétitions dans les meilleures familles de Pavie. Mais enfin, par arrêté du 22 novembre 1855, il fut admis à faire dans le gymnase de Pavie le nécessaire „an d'épreuve". („Probejahr"); le 26 novembre il commençait sa carrière de professeur publique, en s'occupant particulièrement de la physique. Il paraît que les services rendus par lui de cette manière à l'instruction, aient été bien satisfaisants, car il fut nommé pour l'année suivante (par arrêté du 17 décembre 1856) professeur suppléant, aux honoraires annuels de 1620 lires autrichiennes.

Dans les années qui suivirent son doctorat, CREMONA fit la connaissance de E. BELTRAMI, étudiant à l'université de Pavie de 1853 à 1856, et de F. CASORATI, qui prit son degré en 1856. A la même époque, il inaugura son œuvre mathématique. Ses premiers travaux correspondent parfaitement au type qu'on peut construire à *priori* d'un élève de BORDONI et de BRIOSCHI, car ils se rapportent tous à la géométrie analytique élémentaire (voir[1]) [4], [5], [6], [7]) et à l'analyse pure ou appliquée à la géométrie.

Le plus ancien [1], écrit dans l'automne 1855, traite une belle question de géométrie infinitésimale et a été inspiré par la note placée à la fin du mémoire du BORDONI *Sulle figure isoperimetre esistenti in una superficie qualsivoglia.*[2]) Cette note indique une vaste généralisation que peut recevoir la théorie des tangentes conjuguées de DUPIN; si l'on considère une ligne quelconque Γ tracée sur une surface Σ et un système de ∞^1 surfaces dont chacune a avec Σ un contact de l'ordre r en un point P de Γ, alors on a en P deux droites remarquables, savoir, la tangente à Γ et la tangente en P à la correspondante caractéristique de l'enveloppe de ce système de surfaces. Or BORDONI a prouvé que la relation qui existe entre ces deux droites est symétrique; cela explique et justifie le nom de „tangentes conjuguées" qu'il a employé. Lorsque $r = 1$ et que les surfaces considérées sont toutes planes, on retombe sur la notion de tangentes conjuguées ordinaires; mais si, r étant toujours $= 1$, on suppose que ces surfaces soient des sphères, on arrive aux tangentes sphéro-conjuguées de CREMONA.[3])

1) Les nombres entre [ ] renvoient à la liste des publications de CREMONA, placée à la fin de cet article.

2) Publié dans le t. 1 (1832) des Opuscoli matematici e fisici (Milano 1832).

3) Dénomination que M. FELIX MÜLLER ajoutera certainement à une nouvelle édition de son excellent *Vocabulaire mathématique.*

En appliquant une formule générale de BORDONI, ou bien raisonnant directement, notre géomètre prouve la constance du produit des tangentes trigonométriques des angles que deux lignes à tangentes sphéro-conjuguées existant sur une surface et passant par un même point P de cette surface font avec une des lignes de courbure qui passent par P. Il remarque ensuite que si l'on a une série de sphères tangentes à une surface quelconque le long d'une ligne de courbure, elles sont osculatrices à cette ligne en chacun de ses points, offrant ainsi le premier exemple d'une espèce de courbes que plus tard M. DARBOUX a le premier étudiées dans toute leur généralité.[1]) CREMONA ajoute que les droites tangentes en un point P d'une surface aux deux lignes de courbure qui s'entrecroisent en P sont, non seulement conjuguées ordinaires, mais aussi sphéro-conjuguées; cette propriété peut même servir à caractériser les lignes de courbure. Ces propositions subsistent quelle que soit la loi de variation du rayon r de la sphère mobile dans le système considéré; mais il y en a d'autres qui naissent en supposant qu'il existe des relations particulières entre r et les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 de la surface au point de contact; CREMONA suppose successivement que r soit moyen arithmétique, géométrique ou harmonique entre R_1 et R_2, et arrive de la sorte à des propositions qui nous semblent assez élégantes pour avoir une place dans les futurs traités de géométrie différentielle.

Cinq ans après, CREMONA est revenu sur ces mêmes questions [21], probablement à cause d'une imperfection qu'il avait remarquée dans son premier travail.[2]) Mais au lieu de refaire simplement ses anciens calculs, il généralisa les questions qui s'y rapportaient; savoir il supposa que, dans la théorie de BORDONI, r étant toujours $= 1$, les ∞^1 surfaces du systeme ne fussent pas des sphères, mais qu'elles eussent la propriété que leurs points de contact avec Σ fussent des ombilics; et, par un procédé d'une élégance parfaite, il arriva à faire acquérir à ses résultats primitifs une généralité extrêmement remarquable. Je ne sais pourquoi les traités de géométrie infinitésimale tiennent un silence complet sur ces recherches de CREMONA, comme sur celles de BORDONI, d'où elles dérivent.

En revenant au groupe d'investigations que CREMONA fit en sortant de l'université, nous signalerons une belle petite note [2] ayant pour but d'établir le théoreme d'ABEL dans le cas particulier que l'immortel géomètre

---

1) *Les courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface* (Comptes rendus Paris 73, 1871, p. 732—736); voir aussi les autres travaux cités à la p. 158 de mon ouvrage *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (Torino 1896; 2ª ed.).

2) Cette inexactitude consiste en ceci que dans les formules (1) du mémoire [1] (p. 384) il faut changer en $-$ les signes $+$ des binômes: $b_1\gamma + c_1\beta$, $c_1\alpha + a_1\gamma$, $a_1\beta + b_1\alpha$.

signala dans une lettre célèbre à LEGENDRE.[1]) Avant CREMONA ce cas avait été étudié par O. J. BROCH[2]); mais le raisonnement employé par notre mathématicien est d'une simplicité incomparable. Il est fondé sur une formule de SPOTTISWOODE[3]), dont CREMONA expose une remarquable démonstration due à BRIOSCHI et dont il fit un peu plus tard usage [15] pour établir et préciser[4]) la formule suivante de M. ROBERTS:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \ldots & \alpha+\overline{n-1}\,\delta \\ \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \ldots & \alpha \\ \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \ldots & \alpha+\delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha+\overline{n-1}\,\delta & \alpha+n\delta & \ldots & \alpha+\overline{n-2}\,\delta \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \cdot \frac{n\delta^{n-1}(2\alpha+\overline{n-1}\,\delta)}{2}.$$

3. Séjour à Cremone.

Ces travaux et les résultats donnés par l'enseignement de CREMONA au gymnase de Pavie montrèrent à l'autorité supérieure qu'il était bien digne d'une place plus élevée et moins précaire que celle qu'on lui avait donnée. En effet, par arrêté du 17 janvier 1857, il fut envoyé au gymnase de Cremone, avec le titre de professeur ordinaire. Il se rendit tout de suite avec sa famille à sa nouvelle destination et dans le deuxième semestre de la même année il donna l'enseignement mathématique aux élèves des six dernières des huit classes qui formaient cet établissement. Pour juger combien lourde était la tâche du nouveau professeur, il suffit de remarquer qu'il devait faire chaque semaine *dix-sept* heures de leçon et montrer l'arithmétique, l'algèbre élémentaire (jusqu'aux progressions, le binôme de NEWTON et les logarithmes), la géométrie intuitive, la géométrie du plan et de l'espace, la trigonométrie et encore des notions sur l'application de l'algèbre à la géométrie.[5]) Du zèle et de l'ardeur deployés par CREMONA dans son rôle de professeur, le souvenir est encore très vif chez un homme qui était alors un de ses élèves, MASSIMO MISANI (actuellement directeur de l'institut téchnique d'Udine), qui rappelle la clarté, la rigueur et l'efficacité de sa méthode didactique; nous tenons aussi de lui que, comme il n'y avait pas alors en Italie de bons textes pour l'enseignement mathématique, CREMONA avait la patience de rédiger des résumés de ses leçons que les élèves copiaient pour leur usage.

---

1) Journ. für Mathem. 6, p. 73—80; *Oeuvres complètes d'ABEL*, nouv. éd. (1881) t. II, p. 276—277.

2) *Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes* (Journ. für Mathem. 20, 1840, p. 178—188).

3) *Elementary theorems relating to determinants* (Journ. für Mathem. 51, 1856).

4) ROBERTS avait écrit ± dans le second membre de l'équation.

5) Voir le Programma dell' I. R. ginnasio liceale di Cremona, 1857.

Cette implicite déclaration du peu d'estime qu'il avait pour les traités qui avaient alors cours dans les écoles italiennes, nous explique la joie qu'il éprouva lorsque parurent les traductions italiennes de l'*Algèbre* de BERTRAND et de la *Géométrie* d'AMIOT; le contentement pour la première nous est connu par le témoignage de ce même élève de CREMONA que nous avons cité ci-dessus, et la satisfaction produite par la seconde se trouva publiquement déclaré dans un savant article bibliographique [22], malheureusement inachevé, que lui consacra notre savant et qui a sans doute contribué puissamment au succès d'un livre qui assura une bonne instruction géométrique à plusieurs générations d'étudiants au déçà des Alpes.

Peu de temps après avoir été nommé professeur ordinaire, CREMONA fut invité à écrire un mémoire scientifique pour le Programme de l'institut dont il faisait partie (c'est un coutume qui subsiste encore en Allemagne et en Autriche); ayant accepté, il choisit comme sujet de son travail [3] quelques théorèmes énoncés par LAFITTE dans le cahier de mai 1857 des Nouvelles annales de mathématiques[1]); pour les démontrer, il employa cette méthode, si élégante et puissante lorsqu'il s'agit de la géométrie de position, que les mathématiciens anglais appellaient „abridged notation". Les théorèmes dont il s'agit se rapportent aux figures homographiques et aux sections coniques; nous n'en rapporterons pas les énoncés; nous remarquerons seulement que, en les établissant, CREMONA s'est montré tout-à-fait le maître du procédé employé, procédé qui, généralisé à l'espace, devait bientôt le conduire à des résultats de la plus grande importance.

De Cremone est encore daté un travail de notre géomètre [8] travail qui bien qu'étant un simple article bibliographique, mérite d'être signalé, avant tout parce qu'il donne la preuve des études supérieures que CREMONA faisait alors, et ensuite parce qu'il renferme des déclarations de principe qui nous semblent importantes. Il s'agit d'une analyse des deux premiers cahiers des *Beiträge zur Geometrie der Lage;* CREMONA n'était pas alors admirateur enthousiaste de la méthode pure du célèbre professeur de Nürnberg, et lorsqu'il disait que „les propriétés descriptives et les propriétés métriques des figures sont si étroitement liées entre elles, qu'il n'est pas avantageux de prononcer entre elles un divorce complet", il prenait rang dans l'armée ayant pour généraux CHASLES et STEINER, où il devait combattre toute sa vie en capitaine plein d'ardeur et de courage.

4. Recherches de Cremona sur la théorie des cubiques gauches.

Pendant son séjour à Cremone notre mathématicien écrivit bon nombre de travaux qui fixèrent sur lui l'attention des savants et qui, même

---

1) *Neuf théorèmes de géométrie segmentaire* (Nouv. ann. de mathém. 16, 1857, p. 202—207).

aujourd'hui, ont encore une grande importance; j'ai en vue surtout ceux qui ont pour sujet les courbes gauches du troisième ordre.

Le premier de ces ouvrages [9], écrit au printemps 1858, est un mémoire soigné, ayant pour but principal la démonstration des théorèmes énoncés par CHASLES dans la note XXXIII de l'*Aperçu historique* et plus complètement dans la note intitulée *Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre*.[1]) Suivant l'exemple de son maître BRIOSCHI (qui, dans la courte note *Sulle costruzioni del CHASLES per le linee del terzo e quarto ordine*,[2]) avait prouvé l'utilité de l'algèbre dans l'étude des propriétés descriptives des figures), CREMONA eut recours, pour atteindre son but, à une méthode analytique dont le plus éclatant mérite est prouvé par cela qu'il n'a pas été possible de la remplacer par une autre plus élégante et plus féconde: c'est une méthode qui sous une autre forme se trouve dans le *Barycentrischer Calcul* (1827) de MÖBIUS, mais que CREMONA découvrit de son côté trente ans après; elle repose sur la remarque que, A, B, C, D étant quatre fonctions linéaires indépendantes des coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, deux cônes ayant une génératrice commune peuvent se représenter par deux équations du type suivant:

$$BD - C^2 = 0, \quad AC - B^2 = 0.$$

Cela prouve que la courbe où ils se coupent (on l'appelle cubique gauche, d'après la proposition faite par CREMONA et acceptée généralement depuis), peut se représenter analytiquement à l'aide d'un paramètre ω par les formules suivantes:

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1;$$

la tangente au point (ω) de la courbe est alors représentée par les équations

$$A - 2\omega B + \omega^2 C = 0, \quad B - 2\omega C + \omega^2 D = 0,$$

et le plan osculateur par l'équation

$$A - 3\omega B + 3\omega^2 C - \omega^3 D = 0.$$

Tout le monde sait aujourd'hui que cette représentation analytique conduit par le chemin le plus direct et le plus court aux propriétés fondamentales des points, des tangentes et des plans osculateurs de la courbe. A celles que l'on connaissait avant lui, CREMONA en ajouta de nouvelles, parmi lesquelles nous choisissons les suivantes: „Si une droite, coupant en un point une cubique gauche, est l'axe d'un faisceau de plans, les couples de points où ces plans rencontrent encore la courbe forment une involution. Un plan osculateur variable d'une cubique gauche coupe un plan fixe π suivant une droite et la développable osculatrice suivant

1) Comptes rendus Paris 45, 1857, p. 189—197. Comp. *Rapport sur les progrès de la géométrie en France* (Paris 1870), p. 246—247.

2) Annali d. sc. matem. 6, 1855; ou bien *Opere matematiche di F. Brioschi* t. 1 (Milan 1901), p. 177.

une conique (*inscrite* dans la développable); le pôle de cette droite par rapport à cette conique a comme lieu géométrique une autre conique, dont le plan π' s'appelle *conjoint* au plan π; en particulier lorsque π est à l'infini, on voit que le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice d'une conique gauche est une section conique. Si un plan π est conjoint à π', inversement π' sera conjoint à π et les intersections de la courbe avec π et π' seront accouplées en involution. — Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points quelconques d'une cubique gauche et O un point extérieur; on détermine les points P_{ik} et P_{lm} où la courbe est encore coupée par les deux plans $O\,P_i\,P_k$, $O\,P_l\,P_m$ (i, k, l, m étant un permutation quelconque de 1, 2, 3, 4) et enfin celui P où elle l'est par le plan $O\,P_{ik}\,P_{lm}$; ce point P est indépendant de la permutation $i\,k\,l\,m$, et s'appelle *point opposé* aux quatre points P_1, P_2, P_3, P_4".

Au concept de *plans conjoints* d'après la loi de dualité correspond celui de *points conjoints;* tous les deux sont les fondements d'un nouveau chapitre de la théorie des cubiques gauches, que STAUDT écrivit de nouveau après CREMONA.[1]) Celui-ci développa considérablement cette théorie dans un autre mémoire [10], où il combina ces concepts avec la considération du Nullsystem lié à toute cubique gauche, comme nous allons le montrer. Soient: π un plan quelconque de l'espace; P son foyer; A, B, C les points où π coupe la cubique gauche considérée et p la droite (*directrice*) polaire du point P par rapport à la courbe du troisième ordre formée par les droites BC, CA, AB. Appelons *conjointes* deux coniques de la développable circonscrite lorsqu'elles se trouvent sur deux plans conjoints, *conjoints* les triangles où la cubique gauche est coupée par deux plans conjoints et *conjoints* les deux trièdres formés par les plans osculateurs correspondants. On peut alors prouver les théorèmes suivants: „La droite qui joint les foyers de deux plans conjoints est une corde de la courbe, tandis que l'intersection de ces plans est la directrice de tous les deux. Par un point quelconque de l'espace passent trois directrices réelles ou bien une seule, suivant que par ce point passent trois plans osculateurs ou un seul. Les droites où se coupent les faces correspondantes de deux trièdres conjoints et les deux coniques conjointes relatives appartiennent au même hyperboloïde à une nappe". Etc. etc.

Ces propriétés subsistent pour toutes les cubiques gauches, tandis qu'il y en a d'autres dont la validité dépend de la situation de la courbe par rapport au plan à l'infini. Une classe remarquable de ces propriétés a été étudiée par CREMONA [12] en essayant de généraliser à l'espace les belles propositions relatives aux coniques circonscrites à un quadrangle ou bien

1) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3. Heft (Nürnberg 1860), p. 278.

inscrites dans un quadrilatère, que venaient alors d'établir ou d'énoncer TRUDI[1]) et STEINER[2]). A cet effet il commença par la remarque que, en choisissant d'une manière convenable les axes cartésiennes, il est toujours possible de représenter une cubique gauche Γ par des équations du type suivant:

$$\frac{x}{a}=\frac{\vartheta^3}{\varphi},\ \frac{y}{b}=\frac{\vartheta^2}{\varphi},\ \frac{z}{c}=\frac{\vartheta}{\varphi};$$

ϑ est un parametre, $\varphi=(\vartheta-\alpha)^2\pm\beta^2$, et la constante a peut toujours être supposée égale à 0. Les plans osculateurs de Γ forment une surface développable du 4e ordre et de la 3e classe renfermant ∞^4 coniques (*inscrites* dans la développable); or en appliquant les équations ci-dessus, CREMONA trouva que:

1. Si Γ a à l'infini trois points réels, toutes les coniques inscrites sont des hyperboles dont les centres forment une ellipse; par la courbe passent trois cylindres du second ordre, tous hyperboliques.

2. Si au contraire Γ n'a à l'infini qu'un point réel, entre ces coniques il y a ∞^1 ellipses, ∞^1 hyperboles et deux paraboles; le lieu des centres de ces coniques est une hyperbole dont le plan est parallèle et également éloigné des plans de ces deux paraboles; par la courbe ne passe qu'un cylindre du second ordre, qui est elliptique.

Cela prouve la convenance de faire de toutes les cubiques gauches deux grandes catégories. Mais à CREMONA n'échappa pas l'existence de deux sous-classes remarquables, dont l'une comprend les cubiques gauches tangentes au plan à l'infini et qu'on peut représenter par les équations du type suivant:

$$\frac{x}{a}=\frac{\vartheta^3}{(\vartheta-\alpha)^3},\ \frac{y}{b}=\frac{\vartheta^2}{(\vartheta-\alpha)^2},\ \frac{z}{c}=\frac{\vartheta}{\vartheta-\alpha},$$

et l'autre les cubiques gauches osculatrices au même plan et qui peuvent se représenter par des équations telles que les suivantes

$$\frac{x}{a}=\vartheta^3,\ \frac{y}{b}=\vartheta^2,\ \frac{z}{c}=\vartheta.$$

On arrive de la sorte à la classification des cubiques gauches que SEYDEWITZ[3]) avait proposée auparavant, dans un mémoire qui CREMONA ne connut que plus tard.[4]) A la fin de son travail il donne la preuve

1) Mem. dell' acc. d. sc. di Napoli **1**, 1856.

2) *Vermischte Sätze und Aufgaben*, § III (Journ. für Mathem. **55**, 1858, ou bien *Ges. Werke* T. II, p. 678).

3) *Lineare Construction einer Curve doppelter Krümmung* (Arch. der Mathem. **10**, 1847).

4) Cette classification a été de nouveau signalée par notre géomètre au cours de la solution qu'il donna [13] d'une question proposée dans les Nouv. ann. de mathém. touchant les cubiques gauches; lorsque CREMONA connut plus tard le travail de SEYDEWITZ, il accepta la nomenclature que celui avait proposée (comp. [24] §§ V, VI).

qu'il avait dès alors compris combien remarquable est la cubique gauche osculatrice au plan à l'infini; et peu après il établit un beau théorème [17], qui fait voir une frappante analogie entre cette courbe à double courbure et la parabole ordinaire.

Il est bon de remarquer ici que le mémoire [12] que nous venons d'analyser est tout-à-fait analogue à un autre [11] plus ancien relatif aux surfaces du second ordre, qui a aussi été composé dans le but de généraliser à l'espace les théorèmes susmentionés de TRUDI et de STEINER. Dans ce nouveau travail CREMONA, en employant les coordonnées tangentielles, s'est proposé de chercher de quelles espèces étaient les ∞^1 surfaces de 2^e classe inscrites dans une développable de la quatrième classe. On sait que parmi ces ∞^1 surfaces il y a quatre coniques, dont les plans forment un tétraèdre autopolaire par rapport à toutes ces surfaces; or CREMONA prend comme origine des coodonnées un sommet de ce tétraèdre et comme axes coordonnés les arêtes sortant de ce sommet; il exclut en conséquence les cas où le tétraèdre dont il s'agit a quelque élément imaginaire; comme ces cas peuvent bien se présenter, son analyse n'est pas complète et (si on ne l'a pas encore fait) il serait à désirer que quelqu'un prît la peine de la compléter 1). — Mais il y a un très remarquable système de quadriques inscrites dans la même développable pour lequel le tétraèdre polaire est toujours complètement réel; c'est le système des quadriques homofocales. CHASLES, dans la Note XXXII de l'*Aperçu historique* et plus tard dans un *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* 2), en énonça les propriétés les plus essentielles; or CREMONA dans une importante Revue bibliographique [19], après avoir établi analytiquement les quatre principaux théorèmes énoncés par le grand géomètre français 3), en signala un plus général d'où il sut tirer ces quatre cas particuliers. 4)

Après cette digression, que nos lecteurs voudront bien nous pardonner, nous continuerons l'analyse des travaux de CREMONA sur les cubiques gauches. Le premier que nous trouvons [24], est postérieur d'environ une année au dernier qui nous a occupé [12]. L'activité hors ligne déployée par notre géomètre à donner toujours *unicuique suum* nous permet de déterminer la cause du changement de direction qu'il manifeste; dans cette année il prit connaissance directe des recherches sur les cubiques gauches qu'avaient

1) Il est bon de remarquer que la question corrélative (recherche des différentes espèces de surfaces du 2^e ordre d'un faisceau) a été parfaitement résolue plus tard par CREMONA d'une manière synthétique: voir *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, p. 276—282.

2) Comptes rendus Paris 50, 1860, p. 1055—1063, 1110—1115.

3) Comp. *Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 233.

4) Ajoutons qu'un problème spécial relatif aux quadriques homofocales a été résolu par CREMONA dans un autre travail [32].

depuis longtemps accomplies MÖBIUS et SEYDEWITZ et de celles plus récentes que SCHRÖTER avait publiées dans les t. 54 et 56 du Journ. für Mathem.; par ces dernières CREMONA se fit la conviction que les procédés logiques employés par SCHRÖTER sont les plus adaptés pour étudier les cubiques gauches (et aussi d'autres figures géométriques plus compliquées[1]); par conséquence le mémoire [24] nous apparaît doué du plus grand intérêt, car il manifeste une nouvelle direction prise par la pensée de notre mathématicien, direction à laquelle il devait demeurer toujours fidèle et qui lui fit atteindre les sommets de la gloire. Dans ce mémoire CREMONA établit avant tout la générabilité de toute cubique gauche à l'aide d'un faisceau de plans et des ∞^1 génératrices d'un système d'une quadrique en correspondance projective, ou bien à l'aide d'éléments corrélatifs, en remarquant des cas spéciaux de ces générations. L'utilité de ses methodes de génération est prouvée par CREMONA par les solutions de deux questions proposées, l'une par CHASLES et l'autre par STEINER; la première consiste dans la construction des (deux) cubiques gauches appartenant à un hyperboloïde à une nappe et passant par cinq points de cette surface; l'autre a pour but la détermination du nombre (quatre) des points dont chacun est l'intersection de quatre plans correspondants en un même nombre de faisceaux projectifs de plans.

L'impression que firent sur CREMONA ces travaux de SCHRÖTER, non seulement ne s'effaça pas avec le temps, mais on dirait qu'elle devint toujours plus profonde; car au printemps 1861 il jugea utile de reprendre *ex novo* la théorie des cubiques gauches [38], avant tout pour donner un historique détaillé et complet des travaux de ces derniers (MÖBIUS, CHASLES, CAYLEY, SALMON, SEYDEWITZ et SCHRÖTER), et après pour exposer sous une forme purement géométrique sa théorie des points conjoints et des plans conjoints par rapport à une cubique gauche, et pour déterminer, sans avoir recours à l'analyse, les espèces de coniques inscrites dans une développable du 4e ordre et de la 3e classe. Ce travail, pour la nouveauté des résultats, n'est certainement pas comparable à d'autres du même auteur, mais à cause de la méthode employée et de la pureté de son style, il est bien digne de l'admiration générale dont il fut l'objet.

S'étant mis en train d'étudier les cubiques gauches au point de vue de la géométrie moderne, CREMONA aperçut bientôt la nécessité de résoudre les questions relatives à la construction de ces courbes; il composa en conséquence un remarquable mémoire [39] pour exposer la construction d'une courbe du 3e ordre à double courbure déterminée par n de ses points et $6-n$ de ses cordes ($n=6, 5, \ldots, 0$). Il est bon d'observer que dans le cas $n=0$ le problème a *six* solutions, circonstance que CREMONA

1) Comp. aussi Nouv. ann. de mathém. 1_2, p. 291 note.

a remarquée le premier.[1]) Notons encore que CREMONA rencontra, au cours de ses recherches, le corrélatif du théorème suivant: „si deux cubiques gauches n'ont pas de points communs, elles auront dix cordes communes"; proposition qu'il démontra en substituant à une des courbes données le système formé par une conique et une droite qui la coupe; c'est un des premiers exemples (mais pas le seul qu'ait offert CREMONA) d'un fécond procédé de recherche aujourd'hui très employé et qui appartient aux applications du „principe de la conservation du nombre" de M. SCHUBERT.[2]) C'est peut-être en étendant ce procédé logique que notre auteur parvint à cette autre proposition bien plus générale, qu'il se borna à énoncer: „Si deux courbes gauches des ordres m, m', douées de a, a' points doubles apparents, se coupent en r points, le nombre de leurs cordes communes sera exprimé par

$$\frac{mm'(m-1)(m'-1)}{4} + a\,a' + \frac{r(r-1)}{2}.\text{“}$$

CREMONA donna une autre contribution remarquable à la théorie qui nous occupe maintenant, en cherchant [57] le nombre des quadriques de révolution qui passent par une cubique gauche donnée; la remarque qu'il utilisa pour découvrir ce nombre est qu'une surface du 2e ordre de révolution est bitangente au cercle imaginaire à l'infini, de sorte que le nombre cherché est égal à celui des coniques circonscrites à un triangle donné et bitangentes à une conique appartenant au plan de ce triangle; ce nombre est donc *quatre* lorsqu'il s'agit d'une hyperbole gauche, *deux* si la courbe est une hyperbole parabolique ou bien une hyperbole gauche coupant deux fois le cercle imaginaire à l'infini[3]). Ce dernier cas particulier des courbes du 3e ordre à double courbure a été rencontré par CREMONA, aussi en cherchant [60] le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des points d'une droite sur les plans projectivement correspondants d'un faisceau; dans cette occasion il proposa

---

1) M. REYE l'attribue au contraire à M. STURM (*Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der kubischen Raumkurven übersichtlich dargestellt;* Festschrift der mathem. Ges. in Hamburg, 1890, p. 48).

2) M. R. STURM est arrivé au même résultat par une autre voie dans sa note *Combien y a-t-il des sécantes communes à deux cubiques gauches?* (Annali di matem. 3_2, p. 28—32).

3) DRACH puisa aux mémoires sur les cubiques gauches que nous venons d'analyser, pour écrire son *Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte* (Leipzig 1867). BELTRAMI jugea que l'étroite liaison qui existe entre ce livre et les travaux de CREMONA n'avait pas été indiquée assez nettement par DRACH et il en fit l'observation dans la dernière partie (p. 412—419) de ses notes *Sulla teoria delle cubiche gobbe* (Rend. dell' ist. Lomb. 1_2, 1868); or cette partie polémique du travail de BELTRAMI (qui, pour satisfaire au désir de CREMONA, n'a pas été insérée dans les *Opere matematiche* de BELTRAMI) ne doit pas être oubliée dans l'étude des mémoires du savant dont nous nous occupons, en raison des rectifications qui y sont indiquées et qui proviennent de ce dernier.

de désigner la cubique gauche résultante sous les noms de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire*.

Cremona, s'étant tourné, par une évolution naturelle de sa pensée, vers l'étude des courbes planes algébriques (voyez plus bas § 5), ne perdit jamais de vue la théorie où pour la première fois il s'était affirmé vraiment original: trois de ses travaux sont là pour le prouver. Dans l'un d'eux [46] il exposa un certain procédé (auquel il donna le nom de *projection hyperboloïdique*) pour établir une correspondance entre les points d'une cubique gauche Γ et ceux d'une section conique; voici comment on y parvient. La projection de Γ faite d'un de ses points S sur un plan π est une conique K circonscrite au triangle ABC, dont les sommets sont les intersections de Γ et π; or K peut se considérer comme la courbe première polaire d'un certain point O de π par rapport au trilatère ABC. En conséquence, à chaque point S de Γ correspond un point O de π, et, lorsque S décrit Γ, O parcourt une conique Ω circonscrite au triangle ABC. De cette manière (suivant l'opinion de Cremona) les problèmes relatifs à la cubique Γ se transforment en autant de questions plus faciles relatives à la conique Ω: mais quels sont les problèmes qui peuvent ainsi se résoudre, ni Cremona, ni personne après lui ne nous l'ont encore dit. — Dans un autre court article [41], notre géomètre a prouvé cet élégant théorème: „Etant données une cubique gauche Γ et une droite r qui ne la rencontre pas, on mène par r un plan quelconque π qui coupe Γ aux points A, B, C; or, par rapport au triangle ABC, à la droite r correspondent un point et une conique comme enveloppes-polaires de la 1^e et de la 2^e classe; et lorsque π tourne autour de r, P décrit une droite et π une surface du 4^e ordre, dont r est la droite double". — Plus étendu est un autre mémoire [54], par lequel Cremona a voulu tenir une ancienne promesse (voir [12]) de s'occuper particulièrement de la cubique gauche osculatrice au plan à l'infini. La longue route que nous devons parcourir nous empêche de rapporter toutes les profondes considérations exposées dans ce travail et les belles conséquences qu'en déduisit Cremona, mais sur un point le devoir de l'historien nous oblige de nous arrêter. C'est le passage où Cremona signale les cas particuliers que peut présenter une parabole gauche caractérisée par la supposition qu'elle ait un terne (et par conséquence ∞^1 ternes) de plans osculateurs par couples orthogonaux, ou bien un terne (et par suite ∞^1) de droites tangentes deux à deux orthogonales. Dans le premier cas il y a une droite qui est le lieu géométrique des sommets des trièdres trirectangles osculateurs à la courbe, et une autre droite par laquelle passent tous les plans déterminés par les ternes de points de contact; par chaque point de la première passent trois des directrices des paraboles inscrites dans la développable circonscrite à la courbe considérée. Eh bien! ces propriétés, caractéristiques d'une catégerie de cubiques gauches, ont été retrouvées vingt ans après par W. FRANZ MEYER[1]) et O. BÖKLEN[2]), à l'attention desquels le mémoire [54] de CREMONA avait certainement échappé. Ajoutons que dans ce travail on rencontre encore le cas spécial de parabole gauche caractérisé par l'existence d'un plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il coupe en parties égales; notre mathématicien détermine les conditions pour qu'il se présente.

La suite de mémoires de CREMONA sur les cubiques gauches, commencée en avril 1858, ne se termina qu'en avril 1879; elle commence par le premier travail vraiment original de notre mathématicien et finit par celui qu'on pourrait dire le dernier [109]. Dans ce mémoire, la considération de certaines courbes planes étudiées par EMIL WEYR[3]) et G. DARBOUX[4]) est étendue, non seulement à l'espace ordinaire, mais à tous les espaces linéaires. En effet, CREMONA établit avant tout le théorème suivant: „Si dans un espace de m dimensions on a un systeme de ∞^1 plans

$$t = x_0 + \tau x_1 + \tau^2 x_2 + \ldots + \tau^m x_m = 0$$

du genre 0 et de la classe m, et si la surface de l'ordre n

$$\sum \frac{k_{r_1 r_2 \ldots r_{m-1}}}{t_{r_1} t_{r_2} \ldots t_{r_{m-1}}} = 0$$

(où $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ sont m nombres différents choisis dans la série $1, 2, \ldots, n + m - 1$ et les k sont des constantes), qui contient tous les sommets du polyèdre complet dont les $\binom{n+m-1}{m}$ faces sont les $n+m-1$ plans

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots,\ t_{n+m-1} = 0$$

du système, passe par m des sommets du polyèdre formé par $n + 1$ autres plans du même système, elle passera aussi par les autres“. Dans le cas $m = 3$, ce système est formé par les plans osculateurs d'une cubique gauche; sur ce cas CREMONA s'arrête assez longtemps, établissant un système particulier de coordonnées pour les points de l'espace ordinaire (chaque point étant déterminé par les paramètres des trois plans osculateurs de la courbe qui le contiennent) et en en faisant plusieurs applications très élégantes; citons comme exemple la proposition suivante: „Les sommets de trois polyèdres complets, dont chacun est formé par n plans osculateurs d'une cubique gauche, se trouvent toujours dans une surface de l'ordre $n - 2$ contenant les sommets de ∞^2 polyèdres analogues“. Cela est bien suffisant à prouver que CREMONA a su couronner dignement l'édifice géométrique qu'il avait construit en étudiant les cubiques gauches.

---

1) *Wann besitzt die kubische Parabel eine Directrix?* (Mathem.-naturwiss. Mitt. [Stuttgart] **1**, 11—16).

2) *Über die kubische Parabel mit Directrix* (Zeitschr. für Mathem. **29**, p. 378—782).

3) *Über Involutionen höherer Grade* (Journ. für Mathem. **72**, 1870, p. 285—292).

4) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873).

5. Cremona au lycée de Milan et à l'université de Bologne.

Le désir de faire paraître la dépendance logique qui relie les différents travaux de notre héros, nous a obligé d'abandonner dans notre narration l'ordre exactement chronologique; mais à présent nous allons reprendre le fil de sa biographie.

Son séjour à Cremone dura moins de trois ans. La Lombardie ayant été libérée du joug étranger, le gouvernement italien (par un arrêté du 28 novembre 1859) le nomma professeur au lycée St. Alexandre (aujourd'hui Beccaria). De Milan est daté un mémoire de géométrie analytique [18], dont un résumé parut dans les Nouvelles annales de mathématiques (voir [16], 2e partie), en réponse à une question (498) de ce journal. La question dont il s'agit est un cas tout particulier de la suivante: „Etant donnés une droite OA, un de ses points O et un point B au dehors d'elle, trouver dans le plan ABO une courbe telle qu'en menant une quelconque de ses tangentes et par B la parallèle à cette tangente, les segments OM, ON de la droite OA compris entre ces droites et le point O soient liés par une relation algébrique du degré n $F(OM, ON) = 0$". C'est précisément le problème général que Cremona a traité en maître, en employant les coordonnées tangentielles. Mais il a encore remarqué que sa solution pourrait servir à résoudre la question analogue de l'espace, que l'on peut énoncer comme il suit: „Étant donnés une droite OA, un de ses points A et deux points B, C au dehors, trouver une surface telle qu'en menant *ad libitum* un de ses plans tangents et par B, C les plans parallèles à ce plan, les segments OL, OM, ON de la droite OA compris entre ces plans et le point O soient liés par une relation algébrique du degré n $F(OL, OM, ON) = 0$".

Cremona ne devait pas rester longtemps au lycée de Milan. La Romagne ayant été réunie au royaume d'Italie, le dictateur Farini institua dans l'université de Bologne une chaire de géométrie supérieure; et T. Mamiani, qui était alors ministre de l'instruction, appela Cremona à l'occuper comme professeur ordinaire (arrêté royal du 10 juin 1860), personne ne lui paraissant mieux indiqué pour être désigné à une chaire analogue à celle illustrée par M. Chasles. Par suite de cette décision notre mathématicien fixa en novembre 1860 son domicile dans le chef-lieu de l'Emilie. „Per me (écrivait-il le 26 novembre 1870; voir [97]) i ricordi de' sei anni vissuti in Bologna sono tutti pieni del nome di Domenico Piani[1]). Egli mi ricevette a braccia aperte al mio primo giungere in cotesta città; e mi preparò, presso i colleghi e gli uomini più chiari per sapere, sì cortesi

1) Voir sur ce mathématicien peu connu: D. Santagata, *Della vita e delle opere di Domenico Piani* (Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 1_3, 1871).

accoglienze che, dove credevo di entrare uomo nuovo, trovai indulgenza e benevolenza. Nè il suo patrocinio mi venne mai meno; anzi coll' andar del tempo si fece sempre più affettuoso ed intimo, e non cessò che colla vita." — Mais PIANI ne fut pas le seul savant qui ait contribué à faire que CREMONA ait trouvé si attrayante la résidence de Bologne; une bonne partie du mérite appartient aussi à E. BELTRAMI (nommé professeur d'algèbre à Bologne, sur la proposition de CREMONA) et D. CHELINI (qui y enseigna la mécanique rationnelle durant les années 1860—64); leur accord fut toujours parfait et l'on peut affirmer que CREMONA, avec BELTRAMI et CHELINI, a fondé la haute réputation mathématique dont jouit encore la moderne faculté des sciences de Bologne. Tous les trois devaient rester amis toute leur vie et se retrouver plus tard à Rome; ayant survécu aux deux autres, CREMONA dédia à leur mémoire des notices biographiques (voir [108], [110], [111], [120]) où l'on admire également le sentiment et la doctrine: et la Collectanea mathematica in memoriam D. CHELINI, nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI est et sera toujours un témoignage de sentiments élevés, qui embellissent et ennoblissent la vie humaine.

Ayant été appelé à Bologne pour occuper une chaire de récente création, CREMONA pensa de commencer par un discours d'ouverture le nouvel enseignement, pour en exposer le but et la nature. Ce fut aussi le sentiment de CHASLES lorsqu'il inaugura son cours de géométrie supérieure à la Sorbonne. Mais tandis que le grand géomètre français, déjà mûr et encore tout imbu de ses célèbres recherches historiques, jugea bon de commencer ses leçons en jetant un regard sur ce que la géométrie avait été, le professeur italien, dans l'instant où, jeune et plein d'ardeur, il prenait possession de sa chaire, préféra exposer [25] ce que la géométrie était alors et ce qu'elle aspirait à devenir. L'ancien, mais toujours ardent volontaire, en parlant dans une ville encore toute émue et frémissante de la révolution qui l'avait affranchie de la domination papale, ne crut pas devoir adopter le langage froid de la science abstraite qu'il professait; tout son discours est en consequence comme un hymne à la science et à la patrie; qu'il me soit permis d'en donner une idée, par la transcription de son éloquente peroraison:

> Giovani alunni, che v' accingete a seguirmi in questo corso di geometria moderna, non v' accostate che con saldo proposito di studi pertinaci. Senza un' incrollabile costanza nella fatica non si giunge a possedere una scienza. Se questo nobile proposito è in voi, io vi dico che la scienza vi apparirà bella e ammiranda, e voi l' amerete così fortemente che d' allora in poi gli studi intensi vi riusciranno una dolce necessità della vita. Me fortunato se potessi raggiungere

lo splendido risultato d' invogliare questa generosa gioventù allo studio ed al culto di una grande scienza che ha già procacciato tanta gloria agli stranieri e che fra noi non ha che rarissimi e solitarii cultori!

Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che a conforto della propria ignoranza o a sfogo d' irosi pregiudizii vi chiederanno con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studii, e vi parleranno dell' impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al progresso di una scienza prediletta. Quand' anche la geometria non rendesse, come rende, immediati servigi alle arti belle, all' industria, alla meccanica, all' astronomia, alla fisica; quand' anche un' esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie *matematiche* sortono in un tempo più o meno vicino ad applicazioni prima neppur sospettate; quand' anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza *pura*, furono i più efficaci promotori della presente civiltà — ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l' amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze, ch' essa non può non esercitare sulle generose e intatte anime dei giovani un' alta influenza educativa, elevandoli alla serena e inimitabile poesia della verità! I sapientissimi antichi non vollero mai scompagnata la filosofia, che allora era la scienza della vita, dallo studio della geometria, e PLATONE scriveva sul portico della sua accademia: *Nessuno entri qui se non è geometra.* Lungi dunque da voi questi apostoli delle tenebre; amate la verità e la luce, abbiate fede nei servigi che la scienza rende presto o tardi alla causa della civiltà e della libertà. Credete all' avvenire! questa è la religione del nostro secolo. O giovani felici, cui fortuna concesse di assistere nei più begli anni della vita alla risurrezione della patria vostra, svegliatevi e sorgete a contemplare il novello sole che fiammeggia sull' orizzonte! Se la doppia tirannide dello sgherro austriaco e del livido gesuita vi teneva oziosi e imbecilli, la libertà invece vi vuole operosi e vigili. Nelle armi e nei militari esercizii rinvigorite il corpo; negli studii severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù, e alla luce della scienza imparate ad esser degni di libertà. Se la voce della patria vi chiama al campo, e voi accorrete, pugnate, trionfate o cadete, certi sempre di vincere: le battaglie della nostra indipendenza non si perdono più. Ma se le armi posano, tornate agli studii perocchè anche con questi servite e glorificate l'Italia. L'avvenir suo è nelle vostre mani; il valore dei suoi prodi la strapperà tutta dalle ugne dello straniero, ma ella non durerebbe felice e signora di sè ove non la rendesse onoranda e temuta il senno dei suoi cittadini. Ancora una volta dunque, o giovani. io vi dico: non la turpe inerzia che sfibra anima e corpo, ma i militari e li scientifici studi vi faranno ajutatori alla grandezza di questa nostra Italia che sta per rientrare, al cospetto dell' attonita Europa, nel consorzio delle potenti e libere nazioni, con una sola capitale, Roma, con un solo re, VITTORIO EMANUELE, con un solo e massimo eroe, GARIBALDI.

L'enseignement universitaire de CREMONA répondit-il aux espérances qu'on fondait sur le maître, sur le savant et sur l'auteur de cette magnifique *Prolusione?* C'est opinion universelle que, non seulement il maintint, mais qu'il alla bien plus loin de ce qu'on attendait de lui. Convaincu de la sainteté de la mission confiée à un maître quelconque, il dédiait de longues heures de concentration à préparer ses leçons; son exposition était toujours calme et rigoureuse, mais en même temps vive et attrayante; avec ses élèves il n'était pas avare de conseils et d'assistance; et il leur recommandait sans cesse de se pourvoir d'amples connaissances analytiques, dont il reconnaissait la nécessité pour tout géomètre; on retrouve donc en CREMONA maître, ce mathématicien aux idées larges qui apparaît aux lecteurs de ses mémoires scientifiques. Un groupe de ses nombreux et brillants élèves, ayant désormais une place distinguée dans l'histoire de la géométrie, forme le plus beau témoignage de l'importance de son œuvre didactique: qu'il nous suffise de choisir de ce groupe les noms de A. ARMENANTE, E. CAPORALI, R. DE PAOLIS et EMIL WEYR parmi les morts, E. BERTINI, G. JUNG et G. VERONESE parmi les vivants.

Cette notice sur l'influence de CREMONA sur l'enseignement mathématique contiendrait une déplorable lacune si l'on ne faisait pas mention de l'intérêt qu'il prit toujours et qu'il exprima efficacement à l'enseignement secondaire pendant toute sa vie: nous citerons seulement deux manifestations publiques de cet intérêt. La première se trouve dans la traduction italienne, qu'il commença à faire paraître en 1865, des *Elemente der Mathematik* de R. BALTZER, pour doter les instituts techniques italiens d'un texte conforme aux exigences de la science.[1]) La seconde consiste dans la campagne qu'il soutint à côté de BRIOSCHI et secondé par BETTI, pour obtenir l'introduction des Éléments d'EUCLIDE comme livre de texte dans les écoles classiques; il commença cette campagne en 1867 lorsque, ayant été chargé par le gouvernement de faire une enquête sur l'état de l'enseignement de

1) Je cite ici, faute d'une meilleure occasion, un autre ouvrage dont la traduction porte le nom de CREMONA, c'est le suivant: BREMIKER, *Tavole logaritmico-trigonometriche con cinque decimali* (Milano, Hoepli 1877).

la géométrie, il recommanda l'adoption de l'EUCLIDE pur et simple comme texte dans les lycées[1]); cette campagne lui causa bien des chagrins[2]), mais elle eut l'heureux résultat de (j'emploie les mots mêmes de CREMONA[3]) „sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo".

6. Etudes de Cremona sur la théorie des courbes planes.

Un problème beau, grand et très important marque le commencement des recherches géométriques que CREMONA a faites à Bologne: celui de recueillir, coordonner et exposer sous une forme géométrique et méthodique les nombreuses propriétés qu'on avait découvertes dans les courbes algébriques de tous les ordres; la grande renommée atteinte par l'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [29] fournit la preuve éclatante de la génialité de la solution qu'il en a donnée. D'après les déclarations mêmes de l'auteur, il fut poussé à composer ce travail par le désir d'établir géométriquement les propositions que STEINER avait énoncées sous le titre *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven;* et comme il résulte de ce que dit le grand géomètre suisse, qu'il avait appliqué amplement la théorie des courbes polaires d'un point par rapport à une courbe plane, CREMONA crut bon de commencer par établir méthodiquement cette théorie; mais pour cela étant nécessaire d'employer d'autres notions, notre géomètre, pour être complet, les réunit dans le 1er chapitre de son ouvrage. Dans celui-ci dominent les concepts de rapport anharmonique et d'involution, qui, malgré les travaux antérieurs des géomètres français et allemands, étaient alors trop peu répandus chez nous; et on y trouve encore largement exposée la théorie des centres harmoniques. Comme nouveautés nous y remarquons une considération et un nom: la considération des quatraines de points ayant des rapports harmoniques fondamentaux égaux et le nom d'équianharmonique pour la valeur commune de ces rapports[4]). Il n'est pas nécessaire de nous arrêter plus longtemps

1) Comp. Giorn. di matem. **9**, 1871, p. 182—183.

2) Voyez l'avant-propos des *Elementi di geometria projettiva.*

3) Voir une lettre [84] publiée pour répondre à la traduction (faite dans un but polémique évident) d'un discours de J. M. WILSON sur *EUCLIDE come testo di geometria elementare* (Giorn. di matem. **6**, 1868, p. 361—368). Au même discours avait déjà répliqué J. HOÜEL (Id. **7**, 1869, p. 56) qui, sous le titre de *L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie* (Nouv. ann. de mathém. 8_2, 1869, p. 278—283), fit paraitre une traduction commentée de cette lettre [84].

4) Dans les travaux de CREMONA on remarque un très grand nombre d'applications de la notion de rapport équianharmonique. Une des plus anciennes se trouve dans le théorème suivant: „Un quadrilatère complet a pour couples de sommets opposés

sur le procédé de démonstration dont CREMONA fit usage; tout le monde en connaît les mérites et les défauts; tout le monde sait que, tout en étant synthétique au dehors, il est au fond analytique, et personne n'ignore les efforts qu'on a faits pour mettre à sa place un procédé où les coordonnées ne jouent pas, comme dans celui de CREMONA, le rôle de *Deus ex machina*. — Dans le 2[d] chapitre notre géomètre expose la théorie des polaires, suivant les idées de ses inventeurs (BOBILLIER, PLÜCKER, GRASSMANN, DE JONQUIÈRES) avec des additions d'une valeur considérable et des applications profondes et vastes qui sont autant de trophées des victoires de la géométrie pure et qui ne tardèrent pas à devenir classiques; qu'il suffise de citer les investigations sur les systèmes de courbes et sur les courbes covariantes auxquelles on donne aujourd'hui, d'après CREMONA, les noms de Hessienne, Steinérienne, Cayleyenne et Jacobienne. Sous le rapport de la méthode de raisonnement, signalons sa rigoureuse unité et les nombreuses applications qu'il renferme du principe de la conservation du nombre; des corrections de détail indispensables furent signalées par l'auteur lui-même [56]; M. CURTZE en tint compte dans sa traduction allemande de l'*Introduzione*[1]). — Dans le 3[e] chapitre, CREMONA, qui avait déjà exposé dans les deux précédents les propriétés caractéristiques des sections coniques[2]), applique la théorie générale des courbes algébriques à celles du troisième ordre tout-à-fait générales. MACLAURIN (1748), CHASLES (1837), PLÜCKER (1839, 1847), CAYLEY (1844, 1857), HESSE (1844, 1848, 1849), STEINER (1846), ARONHOLD (1850), SALMON (1851, 1859), S. ROBERTS (1860) et CLEBSCH (1861), parcourant des routes différentes, étaient arrivés à un grand nombre de propriétés de ces courbes; CREMONA, après avoir pris connaissance des travaux de

---

aa', *bb'*, *cc'* et pour diagonales $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. Chacun des côtés (*abc*, *ab'c'*, *a'bc'*, *abc'*) du quadrilatère contient trois points; soient ω, ω' les deux points formant avec ces trois là un système équiharmonique. Chacune des diagonales ($aa' \cdot \beta\gamma$; $bb' \cdot \gamma\alpha$; $cc' \cdot \alpha\beta$) contient quatre points; soient i et i' les points doubles de l'involution qu'ils déterminent. Les huit points analogues à ω, ω' et les six analogues à i, i' appartiennent à la même conique". Il a été énoncé par CREMONA [52], puis démontré géométriquement par lui-même [70] et encore étendu à l'espace [53]. Des recherches analytiques de BATTAGLINI et JANNI (Giorn. di matem.; **2**, p. 49–52), de FERRERS (*One the fourteen points conic;* Messenger of mathem. **3**, p. 68—70) et W. A. WITHWORTH (*Quadrilinear coordinates*, Id. p. 77—79 et *On de fiftypoints conicoid*, Id. p. 144—145) prouvent la valeur qu'on a reconnue en Italie et en Angleterre à ce théorème. Comp. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl. (Leipzig 1903), p. 636.

1) *Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Kurven. Nach der neuen Redaktion unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen* (Greifswald 1865). Du même ouvrage il existe une traduction tchèque due à EM. WEYR (1873).

2) Une application des théoremes fondamentaux sur les faisceaux de coniques se trouve dans la note [33].

ses devanciers et projetant sur eux la lumière qui émanait de sa théorie générale, réussit à les coordonner parfaitement et à les compléter en plusieurs points importants.[1]) La théorie des courbes planes du 3e ordre que l'on trouva dans l'*Introduzione* comprend presque toutes les différentes questions que cette théorie provoque[2]); toutefois celle de la forme que peuvent prendre ces courbes en est totalement exclue. Or deux belles questions, proposées par SYLVESTER pendant le séjour qu'il fit à Naples en janvier 1864[3]), poussèrent CREMONA à fixer son attention de ce côté. Pour résoudre ces questions, il part [51] du théorème de NEWTON qui affirme la possibilité de projeter toute cubique plane suivant une des paraboles divergentes, c'est-à-dire une des courbes qu'on peut représenter par une équation de la forme

$$ax^3 + 3\,bx^2 + 3\,cx + d = -3\,ey^2.$$

Il prouve que si le discriminant R du premier membre est > 0, la courbe est composée d'une branche infinie et d'une ovale, tandis que si $R < 0$ l'ovale manque; dans le cas $R = 0$ la courbe a un point double ou de rebroussement. CREMONA ajoute que dans le premier cas le rapport anharmonique de la courbe est réel et que dans le second il est toujours imaginaire, hormis le cas de la cubique harmonique; une telle cubique peut donc être formée de deux parties ou d'une seulement, tandis qu'une cubique anharmonique ne peut être formée que d'une branche infinie seule. Cette relation entre la figure et le rapport anharmonique d'une cubique a été trouvée depuis sous une autre forme par DURÈGE;[4]) elle est si importante qu'elle ne doit faire ni fait défaut dans aucun traité complet sur les courbes du troisieme ordre[5]).

CREMONA, croyant avec raison que, pour prouver la fécondité et répandre la connaissance d'une méthode, il n'y a pas de système meilleur que celui d'en montrer des applications différentes, ne laissa échapper aucune occasion favorable pour exposer des corollaires qu'on peut plus ou

1) Une élégante application de la théorie des cubiques planes a été faite par CREMONA [34] à la résolution du „problème de l'homographie" proposé par M. CHASLES et résolu antérieurement par ABADIE (Nouv. ann. de mathém. **14**, p. 42), POUDRA (Id. **15**, p. 58) et DE JONQUIÈRES (Id. **17**, p. 399). Comp. Biblioth. mathem. 3_3, 1902, p. 282.

2) Parmi les questions dont CREMONA ne s'est pas occupé *ex professo*, remarquons les méthodes de génération, pour noter qu'il en a, au moins partiellement, traité dans un article [17] consacré aux générations découvertes par GRASSMANN, article qui pose CREMONA parmi ceux qui furent des premiers à apprécier et employer les méthodes de l'*Ausdehnungslehre*.

3) Giorn. di matem. **2**, p. 29.

4) *Über die Formen der Kurven dritter Ordnung* (Journ. für Mathem. **75** et **76**, 1873).

5) Voir en effet SCHRÖTER, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig 1888), p. 146.

moins aisément faire découler des théories qui composent l'*Introduzione*. Par exemple il jugea bon de s'arrêter [43] à établir géométriquement quelques beaux théorèmes sur les coniques énoncés par TRUDI, quoique des démonstrations en eussent déjà été publiées. En outre il ne dédaigna pas de prouver [61] que d'élégants théorèmes sur des systèmes de courbes du 2ᵉ ordre énoncés par SCHRÖTER n'étaient que des simples conséquences de propriétés de la Cayleyenne d'un réseau. Et des questions, proposées par FAURE et relatives aux lieux des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère ou circonscrites à un quadrangle, le conduisirent à établir les caractères du lieu géométrique analogue pour les courbes d'un degré quelconque [52]. Enfin une question relative au lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des points d'une conique sur leurs polaires par rapport à une autre conique lui fournit l'occasion d'appliquer [60] les théorèmes de l'*Introduzione* à l'étude du lieu analogue qu'on obtient en substituant à la première conique une courbe algébrique quelconque et même de la question correspondante dans l'espace.

Mais l'application la plus importante (et par suite la plus connue) qu'ait faite CREMONA de la théorie générale des lignes algébriques est (voir [67]; comp. [63]) celle relative à cette merveilleuse courbe que STEINER a signalée dans une célèbre communication faite à l'académie de Berlin le 7 janvier 1856[1]). C'est la courbe enveloppée par les droites de SIMSON de tous les points d'un cercle par rapport à un triangle inscrit; cette courbe est du 4ᵉ ordre et de la 3ᵉ classe, et tangente à la droite à l'infini du plan aux points circulaires; or CREMONA, pour établir les propositions énoncées par STEINER[2]), part précisément d'une courbe douée de ces propriétés et, en se servant de la 3ᵉ partie de l'*Introduzione*, il arrive à tous les théorèmes dont on connaissait déjà l'énoncé et à d'autres nouveaux; p. ex. il parvient à établir que cette courbe est un hypocycloïde à trois rebroussements et à en découvrir la présence dans la théorie des cubiques gauches. La beauté de la méthode géométrique dont se servit CREMONA fit une impression très vive sur un grand analyste, A. CLEBSCH, qui se hâta de prouver[3]) qu'on pouvait la traduire en formules d'une élégance parfaite; c'est une qualité de cette méthode qu'on ne doit pas oublier.

Nous ne pouvons ni ne voulons finir cette rapide analyse des contributions données par notre mathématicien à la théorie des courbes planes sans dire quelques mots du rôle qu'il a joué dans la formation de la théorie

1) *Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierten Grades)* (Journ. für Mathem. **53**, 1857).

2) Non seulement dans la note précédente, mais aussi dans quelques *Vermischte Sätze und Aufgaben* (Ges. Werke, T. II p. 677—678, no. 6).

3) *Note zur vorstehenden Abhandlung* (Journ. für Mathem. **64**, 1865, p. 124—125).

des systèmes de coniques. Même lorsqu'elle se trouvait dans son enfance, il s'efforçait et réussit [47] à expliquer l'apparente contradiction qu'on trouve lorsqu'on cherche à appliquer la théorie générale des systèmes de courbes à la détermination du nombre des coniques passant par n points données et tangents à $5 - n$ droites données. Mais lorsque CHASLES fit parvenir cette théorie à sa maturité, en substituant ses deux caractéristiques à l'indice de E. DE JONQUIÈRES[1]), CREMONA se hâta de donner [49] des démonstrations lumineuses des théorèmes énoncés par ce géomètre dans sa célèbre communication du 1^{er} février 1864; de cette manière il arriva à effacer le désaccord (noté par CHASLES lui-même) existant entre ces théorèmes et une formule plus ancienne de BISCHOFF.[2]) J'ajoute que sous le modeste cadre d'une revue bibliographique, CREMONA donna [50] un commentaire complet de la théorie des caractéristiques, exposée par CHASLES dans les séances que tint l'Institut de France dans les jours 1 et 15 février, 7 mars, 27 juin, 4 et 18 juillet, 1 et 22 août 1864. Ce commentaire (que M. CURTZE a inseré dans sa traduction de l'*Introduzione*) a sans doute puissamment contribué à faire comprendre et à vulgariser la théorie des systèmes de coniques; comme chose originale il renferme une extension de la méthode de CHASLES aux systèmes de ∞^2 coniques, qui a été jugée par celui-ci assez importante pour être communiquée à l'académie des sciences [55]. — L'intérêt de CREMONA pour la théorie créée par CHASLES ne s'éteignit pas de si tôt; deux de ses publications servent à le prouver: dans l'une [65] on trouve la généralisation aux systèmes de ∞^1 surfaces du 2^d ordre des célèbres formules qui lient les caractéristiques d'un système de ∞^1 coniques aux nombres des coniques exceptionnelles qu'il renferme; la seconde (c'est une lettre à M. CHASLES [75]) contient quelques considérations de géométrie à trois dimensions qui amènent à des courbes exceptionnelles d'un système de ∞^1 lieux algébriques, courbes dont l'étude était alors à l'ordre du jour.

7. Les transformations birationnelles planes.

Pendant son séjour à Bologne, CREMONA a jeté les fondements d'une théorie qui lui appartient d'une manière si indiscutable que son nom est pour toujours lié à elle; il est à peine nécessaire de dire que nous voulons parler des transformations birationnelles d'un plan en un autre. CREMONA fut amené à s'en occuper par l'étude d'un mémoire lu

---

1) Voir mon essai sur *L'œuvre mathématique d'ERNEST DE JONQUIÈRES* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 295 et suiv.).

2) *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Kurven* (Journ. für Mathem. **56**, 1859, p. 166—177).

à l'académie des sciences de Turin par un jeune homme destiné à devenir le prince des astronomes italiens;[1]) ce mémoire lui suggéra l'idée d'étudier [35] les transformations planes corrélatives à celles considerées par SCHIAPARELLI, c'est-à-dire celles dans lesquelles à chaque droite correspond une droite et à chaque faisceau de droites une conique inscrite dans un triangle fixe. En employant les coordonnées plückériennes pour les droites et en imitant le procédé de SCHIAPARELLI, il prouva que, à l'aide de transformations homographiques, on peut réduire la plus générale des dites transformations à deux types très simples, dont les équations sont une des suivantes:[2])

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$
$$\xi' = \frac{1}{\eta}, \quad \eta' = \frac{1}{\xi}.$$

Ces formules prouvent que deux droites correspondantes quelconques sont en général parallèles, mais qu'elles coïncident lorsqu'elles sont tangentes respectivement à l'une ou à l'autre des coniques:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi\eta = 1.$$

Dans une transformation du premier type, aux points (x, y) du deuxième plan correspondent les ∞^1 paraboles homofocales

$$x\xi + y\eta + \xi^2 + \eta^2 = 0;$$

tandis que dans une transformation du second type, aux points (x, y) correspondent dans le premier plan les ∞^1 paraboles

$$x\xi + y\eta + \xi\eta = 0.$$

Dans les transformations de tous les deux types, deux droites correspondantes quelconques sont parallèles entre elles, mais dans celles du premier leurs distances de l'origine sont inversement proportionnelles. Etc. etc.

Il y a un cas particulier de ces transformations dont BELTRAMI (parmi autres géomètres) s'est occupé[3]); voici comment on y parvient: „Si aa', bb', cc' sont les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet et α, β, γ les points diagonaux, on considère les points conjugués harmoniques des points où une droite quelconque r coupe les diagonales, par rapport aux couples aa', bb', cc'; ces points appartiennent à une autre droite r'[4]); et lorsque r tourne autour d'un point

---

1) *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Mem. dell' acc. d. sc. di Torino 21_2, 1864, p. 227—319).

2) CREMONA ne les a pas écrites; nous les avons ajoutées, car elles conduisent immédiatement aux propositions qu'il s'est borné à énoncer.

3) Voyez mon essai *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche* (Biblioth. Mathem., 2_3, 1901, p. 427).

4) Les droites r, r' coupent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère considéré; cette propriété énoncée par CREMONA dans les Educational times a été reproduite comme *Question 872* dans les Nouv. ann. de mathém. 7_2, p. 237.

fixe, r' enveloppe une conique inscrite dans le triangle$\alpha\ \beta\ \gamma$". Or notre géomètre remarqua [71] qu'en supposant que les points i, i' soient les points circulaires à l'infini, les ∞^1 coniques inscrites dans le quadrilatère donné ont toutes comme foyers les quatre points a, a', b, b', et γ comme centre, et que deux droites correspondantes r, r' sont l'une tangente et l'autre normale à la conique du système qui passe par le point rr'. Dans cette transformation, que CREMONA signala à M. FIEDLER,[1]) il a reconnu une méthode rationnelle pour traiter toute la théorie des coniques homofocales; nous la recommandons aux futurs propagateurs de cette importante théorie.

Le mémoire de SCHIAPARELLI, que nous avons cité plus haut, a été le point de départ d'autres recherches de CREMONA, dont l'importance est bien plus grande, et dont nous allons rendre compte. Par la manière dont SCHIAPARELLI posa la question de déterminer les transformations univoques entre les points de deux plans, il fut amené à conclure que les seules de cette nature sont celles où aux droites du plan correspondent des droites ou bien des coniques circonscrites à un triangle fixe. Or l'existence d'autres transformations univoques résultait dès ce temps de quelques phrases qu'on lit dans l'avant-propos (p. VII) de la *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) de MAGNUS, et encore du résumé, déjà publié, d'un mémoire bien connu de E. DE JONQUIÈRES[2]). Quoique ces phrases et ce résumé paraissent avoir échappé à notre mathématicien, il remarqua que le produit de plusieurs transformations linéaires ou quadratiques est, contrairement à la proposition de SCHIAPARELLI, une transformation univoque en général plus compliquée que les transformations effectuées. Cette remarque le conduisit à se proposer la recherche de toutes les transformations birationnelles entre deux plans, et pour l'accomplir il était admirablement préparé par les études, qu'il venait alors de finir, sur la théorie générale des courbes algébriques planes. La remarque qui sert de base à la solution donnée par CREMONA [36] du probleme énoncé, est que dans toute transformation de la nature indiquée, aux droites d'un des plans considérés correspondent dans l'autre ∞^2 courbes unicursales d'un degré n, formant un réseau tel que deux quelconques de ces courbes n'ont qu'un point d'intersection *mobile* (c'est-à-dire n'appartenant pas à toutes). Par conséquent, si ces courbes ont x_r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ points r-tiples communs à toutes, on aura les deux célèbres relations suivantes:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} r^2\, x_r = n^2 - 1, \tag{1}$$

1) Voyez SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl., Zweiter Teil (Leipzig 1903), p. XXI et 796.

2) Voir Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 309 et suiv. — Il faut bien dire que DE JONQUIÈRES n'a pas „traité les mêmes questions" que CREMONA, comme on lit à la page 561 du t. 2_2 (1863) des Nouv. ann. de mathém.

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{r(r+1)}{2} x_r = \frac{n(n+3)}{2} - 2;$$

d'où il suit

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{r(r-1)}{2} x_r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

A toute transformation birationnelle du plan correspond une solution des équations (1), (2), mais rien n'autorise à énoncer la proposition réciproque; on peut seulement dire que, pour toute valeur de n, il existe au moins une transformation birationnelle de ce degré; c'est la solution

$$x_1 = 2(n-1),\ x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0,\ x_{n-1} = 0;$$

et CREMONA prouve que la transformation correspondante (appelée aujourd'hui „transformation de JONQUIÈRES") peut se construire en sectionnant par deux plans quelconques les ∞^2 droites qui rencontrent une courbe de l'ordre $n-1$ et une droite la coupant en $n-2$ points.

Cette note [36] demeura un peu de temps isolée. Mais quelques années après, son auteur, ayant eu l'occasion d'approfondir certaines questions relatives aux courbes du plan [56], lui donna une suite [66] pleine d'idées originales et d'une importance hors ligne. Telle est la considération des réseaux conjugués existant dans deux plans en correspondance univoque et des courbes jacobiennes de ces réseaux. Par une analyse dont la spontanéité cache la profondeur, il prouva que, un des réseaux conjugués étant donné, l'autre est par suite déterminé, et on peut en découvrir la structure.1) Pour éclairer la route qui mène à ce résultat, avant tout il étudia tout au long les cas $n = 2, 3, \ldots, 10$, et ensuite, en élargissant la recherche, il s'occupa de nouveau de la transformation de DE JONQUIÈRES et ensuite des cas $n \equiv 0, 1 \pmod 2$ ou bien $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ ou enfin $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$. Le simple examen du tableau résultant révéla à CREMONA la vérité de la proposition suivante: „si $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ sont deux réseaux conjugués, les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ne diffèrent que par leur ordre des nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$"; on sait que cette proposition empirique a été démontrée rigoureusement par CLEBSCH 2). CREMONA remarqua encore qu'une correspondance univoque de l'ordre n entre les points du même plan a $n+2$ points unis; il en tira la généralisation de la méthode, que DE JONQUIÈRES avait proposée,3) pour engendrer des courbes gauches d'ordre quelconque,

1) Ce résultat fondamental est résumé dans un théorème que CREMONA chargea son ami T. ARCHER HIRST de faire connaître à la „British association for the advancement of science" [64].

2) *Zur Theorie der CREMONAschen Transformationen* (Mathem. Ann. 4, 1871, p. 490—496).

3) Comp. Biblioth. mathem. 3_3, 1903, p. 309.

c'est-à-dire en prouvant que „deux gerbes de rayons en correspondance univoque de l'ordre n engendrent une courbe de l'ordre $n+2$", dont il trouva tous les caractères; mais quant au degré de généralité de la courbe résultante, c'est une question que CREMONA ne s'est pas posée et que personne n'a traitée après lui.

Si la valeur des recherches de CREMONA sur les transformations qui portent son nom n'était pas connue de tout le monde, nous pourrions citer deux faits qui la prouvent; c'est: 1°) que les expositeurs ultérieurs de cette théorie[1]) ne lui ont apporté aucun changement essentiel; 2°) que la seule addition vraiment importante qu'elle ait reçue (en même temps par CLIFFORD, NÖTHER, ROSANES) en laissèrent intacte la physionomie générale; or quelle théorie a eu le même sort dans ces dernières années de fiévreux renouvellement pour tous les champs de recherche scientifique?

8. Recherches de Cremona sur quelques courbes gauches algébriques spéciales.

De Bologne sont aussi datés plusieurs autres mémoires de CREMONA qui, sans avoir obtenu la célébrité de ceux que nous avons examinés dans les deux paragraphes précédents, méritent toutefois (même si l'on veut pour un moment ne pas considérer les résultats importants qu'elles renferment) une considération particulière, d'abord parce qu'ils préparent les études plus générales dont nous aurons bientôt à nous occuper (voyez le § suiv.), et ensuite parce qu'ils reflètent cette période historique si attrayante où la géométrie supérieure, assise sur des bases définitives, aspirait à montrer sa valeur par des nouvelles victoires. Et personne, mieux que CREMONA, dans la lutte pour l'hégémonie, si longtemps disputée entre l'analyse et la géométrie, n'a contribué à ce que cette dernière n'ait pas été vaincue.

Dans un mémoire [27] sur les surfaces gauches du 3e degré, dont nous devrons bientôt nous occuper, CREMONA avait indiqué quelques propriétés de la courbe gauche du 4e ordre par laquelle passe une seule surface du 2d ordre, courbe qu'il croyait avoir été découverte par STEINER, tandis que (comme il reconnut plus tard) c'est SALMON qui l'a signalée le premier. Ayant continué à s'en occuper, il la choisit comme sujet de sa première communication à l'institut de Bologne [28]. Si l'on veut juger l'originalité de ces recherches, il faut se ressouvenir que de cette courbe (suivant CREMONA on l'appelle aujourd'hui *courbe gauche du 4e ordre et de la 2e*

1) Sans parler de la traduction que M. DEWULF fit des travaux [36] et [66] (*Sur les transformations géométriques des figures planes, d'après les mémoires publiés par M. CREMONA et des notes inédites;* Bullet. d. sc. mathém. 5, 1873, p. 207—240), je me borne à citer la première partie du célèbre mémoire de CAYLEY *On the rational transformation between two spaces.*

espèce) on ne connaissait alors que la propriété d'être l'intersection d'une quadrique avec une surface du 3e degré, la coupant encore suivant deux génératrices du même système; mais que, de la développable qui lui correspond par dualité, CAYLEY et SALMON s'étaient déjà occupés. CREMONA remarqua la constance du rapport anharmonique des plans qui projettent quatre points fixes de la courbe d'une des ∞^1 droits qui la coupent en trois points; il signala différents procédés pour la construire et considéra différentes surfaces réglées naissant de la considération simultanée de la courbe et de deux droites. Il détermina ensuite le nombre des intersections de deux quartiques de la 2e espèce ou bien d'une quartique et d'une cubique gauche situées sur le même hyperboloïde; il considéra, non seulement la développable osculatrice de la courbe mais aussi celle formée par les plans qui coupent cette courbe en quatre points équianharmoniques ou harmoniques; il étudia encore les projections sur un plan d'une des courbes dont il s'agit; etc. En un mot, en employant les ressources que lui offrait la géométrie pure, il explora tous les domaines où regne la courbe gauche du 4e ordre et de la 2e espèce.

Quelques années plus tard, des recherches d'une nature bien différente (voir [72]) l'amenèrent à s'occuper [78] d'une quartique gauche rationnelle très remarquable, dont la découverte appartient à CAYLEY[1]). Cette courbe est douée de deux points singuliers (A, D), où les tangentes (AB, DC) ont chacune un contact de 2d ordre avec la courbe: si $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$ sont les équations des plans ABC, ABD, ACD, BCD, la courbe pourra se représenter par les équations[2])

$$x : y : z : w = \omega^4 : \omega^3 : \omega : 1.$$

Elle se trouve sur l'hyperboloïde $xw - yz = 0$ et sur la surface (réglée) $xz^2 - wy^2 = 0$. L'équation générale du plan osculateur étant

$$x - 2\omega y + 2\omega^3 z - \omega^4 w = 0,$$

la courbe correspond à sa développable osculatrice par rapport à un *Nullsystem*, qui est la source de ses plus belles propriétés.

Le travail de CREMONA sur les quartiques gauches unicursales [28] avait été déjà lu à l'institut de Bologne, mais, non encore imprimé, lorsque, le 3 juin 1861, M. CHASLES exposa à l'académie des sciences de Paris diverses *Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et d'une certaine surface du 4e ordre.*[3]) La lecture de ce travail prouva tout de suite à CREMONA que bon nombre

1) *On a special sextic developpable* (Quart. journ. of mathem. **7**, 1866, p. 105—113).

2) Cette remarquable représentation paramétrique n'échappa pas à CAYLEY, qui préféra la présenter sous cette forme:

$$a = 2,\ b = -t,\ c = t^3,\ d = -2t^4.$$

3) Comptes rendus Paris **52**, p. 1904—1104.

des propriétés qu'il avait reconnues à ces quartiques étaient des cas particuliers de propriétés dont jouissent deux classes de courbes appartenant à un hyperboloïde (voir [30])[1]). Une de ces classes avait été déjà remarquée par CHASLES; elle comprend des courbes de l'ordre $2m+1$ engendrées chacune par trois faisceaux projectifs formés deux par des plans et le troisième par des surfaces de l'ordre m; les théorèmes que CREMONA énonça à leur sujet ont trait aux relations de ces courbes avec les génératrices de l'hyperboloïde qui les contient, à leurs caractéristiques et à leurs projections planes. Chaque courbe de l'autre de ces classes est engendrée par trois faisceaux de plans, dont deux sont projectifs entre eux et le troisième est formé par les groupes d'une involution de l'ordre m projective aux deux premiers faisceaux. La courbe résultante est de l'ordre $m+2$ (pour $m=1$ c'est une cubique gauche et si $m=2$ une quartique de 2e espèce), dont CREMONA découvrit une foule de belles propriétés, dont quelques unes prouvent qu'une quelconque des courbes en question est la figure corrélative d'une certaine développable déjà étudiée par CAYLEY[2]) et SALMON[3]) et qu'en conséquence son équation tangentielle a pour premier membre le discriminant de la fonction

$$at^{m+2}+(m+2)\,bt^{m-1}+\ldots,$$

a, b, ... étant des fonctions linéaires des coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

9. Recherches de Cremona sur quelques surfaces algébriques spéciales.

Un groupe non moins remarquable de mémoires sur des surfaces algébriques particulières fait pendant à l'ensemble des recherches que nous avons analysées dans le paragraphe précédent.

Les plus anciennes se trouvent dans un mémoire [27] ayant comme principal fondement ce principe de correspondance spécial (entre les points d'une droite et les couples de points d'une involution quadratique projective) que CHASLES énonça et appliqua dans sa note sur la *Construction géométrique des racines des équations du troisième et du quatrième degré*[4]); il semble fournir le moyen le plus naturel pour étudier les surfaces réglées du 3e degré, qui sont précisément le sujet de ce mémoire. On y apprend différents procédés pour déterminer et engendrer une de ces surfaces, plusieurs théorèmes relatifs à leurs directrices, leurs points et leurs plans

1) Ce travail, qui ne renferme que des énoncés, a eu l'honneur d'être cité par CHASLES dans son *Rapport* (p. 249).

2) *Note sur les hyperdéterminants* (Journ. für Mathem. **24**, 1847): *On the developable derived from an equation of the fifth order* (Cambridge and Dublin mathem. journ. **5**, 1850).

3) Cambridge and Dublin mathem. journ. **3**, p. 169 et **5**, p. 152.

4) Comptes rendus Paris **41**, 1855, p. 677—685.

cuspidaux, les plans tangents et les sections planes, etc. Citons encore le beau théorème suivant: „Le lieu des pôles d'une génératrice g d'une surface gauche du 3^e degré Φ par rapport aux ∞^1 coniques suivant lesquelles Φ est coupée par des plans passant par g est une droite h, ayant comme lieu géométrique une surface Ψ de la même espèce que Φ“. Notre géomètre ne manque pas de signaler la forme générale $[y(x^2 + kw^2) - xzw = 0]$ à laquelle peut toujours se réduire l'équation de toute surface cubique réglée; et il observe que, lorsque les points cuspidaux sont réels, elle peut se représenter par l'équation $x^2z - yw^2 = 0$; alors $r^2t + su^2 = 0$ est l'équation tangentielle de la surface Ψ correspondante; d'où il suit que Ψ est la surface polaire réciproque de Φ par rapport à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$[1]).

CAYLEY, au reçu d'un extrait de ce travail, se hâta d'avertir CREMONA (lettre du 12 juin 1861) qu'il existe une surface cubique particulière très remarquable, naissant de celle étudiée par notre mathématicien en faisant coïncider la droite directrice simple avec la directrice double, et qu'on peut engendrer d'une manière très simple. Cela engagea CREMONA à reprendre l'étude de ses surfaces [40] pour trouver avant tout des procédés de génération des surfaces générales conservant un sens déterminé dans le cas particulier découvert par CAYLEY, pour établir ensuite des propositions métriques relatives aux surfaces réglées du 3^e ordre. P. ex. il prouva que, parmi les coniques qui se trouvent sur une telle surface, il y a trois cercles, et que par chaque génératrice de la surface on peut mener trois plans qui la coupent encore suivant une hyperbole équilatère et deux qui la coupent suivant une parabole; il ne manqua pas d'examiner encore comment il faut énoncer ces propriétés lorsqu'on distingue les cas où la surface a 2, 1 ou 0 points cuspidaux réels, ou bien quand elle a des relations particulières avec le plan à l'infini[2]).

En raison de leur sujet et aussi de la méthode employée, aux deux mémoires que nous venons d'analyser sont étroitement liés deux autres travaux d'une date un peu plus récente. Le premier est une courte note [77] ayant pour but de développer la théorie des surfaces réglées d'un degré quelconque ayant deux directrices rectilignes coïncidentes, que CAYLEY venait alors de signaler[3])

---

1) Un de ces résultats a été cité avec éloges par BERTRAND dans son article *Étude des surfaces algébriques* inséré au Journal des savants et reproduit au t. 7_2 (1868) des Nouvelles annales de mathématiques.

2) Les mémoires [27] et [40] ont été amplement utilisés par un disciple de CREMONA, EMIL WEYR, lorsqu'il se proposa d'écrire une exposition méthodique de la théorie des surfaces cubiques réglées; voir *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde insbesondere der Regelfläche dritter Ordnung* (Leipzig 1870).

3) Voir l'Art. 12 de *A second memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **154**, 1864).

et dont la surface réglée du 3e degré de CAYLEY est un cas tout particulier: CREMONA en découvrit bon nombre de propriétés élégantes que le désir d'être bref nous empêche d'énoncer ici. — Le second est un long mémoire [81] qui est sans doute un des plus célèbres parmi ceux de la plume féconde de notre géomètre[1]). Son but est l'étude et la classification des surfaces réglées du 4e degré, sujet dont l'importance est évidente et qui avait déjà occupé deux grands géomètres: CHASLES et CAYLEY; le premier avait dit[2]) (sans toutefois le prouver) qu'il existe *quatorze* espèces différentes de surfaces réglées du 4e ordre, tandis que le second n'en avait rencontré que *huit* au cours de ces recherches sur le lieu des ∞^1 droites qui s'appuient en même temps à trois directrices fixes (différentes ou non)[3]), et deux autres surfaces avaient été ajoutées par lui à la suite de quelques remarques de SCHWARZ[4]). Or CREMONA, à l'aide de considérations géométriques directes et simples et en choisissant comme critère de classification la considération simultanée de la ligne double de la surface et de sa développable bitangente, trouva douze espèces différentes[5]), et découvrit pour chacune les propriétés les plus saisissantes et les principales méthodes de génération. L'histoire de la géométrie dans ces dernières trente-cinq années prouve que cette classification de CREMONA est toujours adoptée; elle a été utilisée même par les constructeurs de modèles, qui durent seulement ajouter des sous-espèces, en introduisant la considération indispensable des éléments réels et imaginaires.[6])

On peut d'ailleurs remarquer que notre mathématicien s'était déjà occupé de surfaces réglées du 4e degré, et précisément de développables, en cherchant et en trouvant [68] des démonstrations géométriques de quelques propositions relatives aux surfaces d'égale pente circonscrites aux coniques; les démonstrations qu'on en lit dans la 1ère édition du *Traité de géométrie descriptive* de LA GOURNERIE sont analytiques, et ce géomètre, dans une lettre publiée au cahier de décembre 1864 du Journal de mathématiques pures et appliquées, avait émis le vœu qu'on en trouvât de géométriques. Or CREMONA, en considérant une des surfaces dont il s'agit comme circonscrite à une conique à distance finie et à une

1) Les principaux résultats de ce travail furent communiqués à CAYLEY par l'auteur en date du 22 novembre 1868; voyez CAYLEY, *Collected papers* t. 6, p. 327.

2) Comptes rendus Paris **53**, 1861, p. 888.

3) *A second memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **154**, 1864).

4) *A third memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **159**, 1869).

5) Ce résultat, communiqué à CAYLEY par une lettre de CREMONA du 20 novembre 1868, est cité dans une *Addition* au mémoire dont le titre se trouve dans la note précédente.

6) K. ROHN, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung* (Mathem. Ann. **28**, 1887).

autre bitangente au cercle imaginaire à l'infini, parvint à ces démonstrations d'une manière qui eut la complète approbation de LA GOURNERIE[1]).

Une année auparavant il s'était déjà occupé avec succès [58] de la plus remarquable parmi les surfaces du 4e degré non réglées, c'est-à-dire de la surface („romaine") de STEINER. On sait que KUMMER fit en juillet 1863 une communication à l'académie des sciences de Berlin, où cette surface apparaît comme le dernier élément de la série de surfaces du 4e ordre dont chacune renferme ∞^1 sections coniques; on sait encore que WEIERSTRASS se hâta de déclarer que cette surface avait été découverte auparavant par STEINER pendant son voyage à Rome en 1844, et SCHRÖTER démontra bientôt les propositions relatives découvertes par STEINER et publiées par WEIERSTRASS. Or trois mois après, CREMONA écrivit sur le même sujet un mémoire[2]) qui peut servir encore à présent comme base à une exposition synthétique des propriétés de la surface dont il s'agit et qui contient aussi plusieurs belles propriétés de celle-ci qui avaient échappées aux géomètres cités ci-dessus. Mais la propriété dont elle jouit, de pouvoir être représentée univoquement sur le plan, en fournissant la méthode la plus naturelle et la plus féconde pour l'étudier à fond, fit négliger la méthode purement géométrique employée par notre mathématicien; il est bon de remarquer qu'il ne fut pas étranger (voir [72]) à ce résultat, en fournissant dans cette occasion la plus belle preuve qu'il n'était pas un géomètre exclusif et du vues étroites.

Nous finirons cette revue des recherches que CREMONA fit à Bologne sur des surfaces particulières en disant quelques mots sur ses études relatives aux surfaces développables du 5e degré [37]. La développable circonscrite à deux surfaces du second ordre est en général de la 4e classe et du 8e ordre; mais son ordre s'abaisse à 6, lorsque les deux surfaces ont entre elles un contact ordinaire en un point, et à 5, lorsque ce contact est stationnaire. L'équation de la développable a été obtenue par CAYLEY en 1850 dans tous les cas[3]); d'ailleurs CHASLES dans son travail *Propriétés des courbes à double courbure du 4e ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre*[4]) énonça plusieurs théorèmes sur la développable générale: or c'est précisément ce mémoire qui décida CREMONA à s'occuper des plus particuliers de ces deux cas. La développable est alors corrélative à son arrêt de rebroussement, et (d'après une remarque de CAYLEY), elle possède un tetraèdre $ABCD$ remarquable, dont les faces ACD, BCD et les arètes AD, BC sont respectivement deux plans tangentes et deux génératrices. Si l'on appelle *conjuguées* deux génératrices

1) Voyez la 2e éd. du *Traité de géométrie descriptive*, 2e Partie (Paris 1880), p. 121 note.

2) CHASLES en parle dans son *Rapport* p. 355.

3) *On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order* (Cambridge and Dublin mathem. journ. 5, 1850, p. 46—57).

4) Comptes rendus Paris 54, 1862, p. 317—324, 418—425.

de la développable situées dans le même plan, *conjugués* leurs points de contact avec l'arète de rebroussement et *conjugués* encore les plans correspondants de la développable, CREMONA fait la remarque tout-à-fait essentielle que deux figures formées par des éléments conjugués se correspondent dans une homologie harmonique dont C est le centre et ABD le plan, et qui donne l'explication des nombreuses et belles propriétés dont jouit la figure en question. Par deux génératrices conjuguées de cette développable passent deux surfaces du second ordre *(associées)* dont l'une est inscrite dans la développable, tandis que l'autre passe par son arète de rebroussement; deux quadriques associés quelconques ont une conique commune (dont le plan passe par la droite BC) et sont inscrites dans le même cône du second ordre (dont le sommet se trouve sur la droite AD); le lieu de toutes ces coniques est une surface du 3e ordre et de la 4e classe, tandis que l'enveloppe de tous ces cônes est une surface (de STEINER) de 4e ordre et de 3e classe; etc. Toutes ces élégantes propositions ne furent qu'énoncées par CREMONA; les démonstrations en furent bientôt données par deux géomètres qui étaient alors au début de leur carrière scientifique: N. SALVATORE-DINO[1]) et E. D'OVIDIO[2]) le premier en employant l'analyse et l'autre en généralisant les procédés logiques utilisés par CREMONA dans une autre occasion (voir [28]). Il est bon d'ajouter que des recherches accomplies par SCHWARZ en juin 1864[3]) ont prouvé que la surface étudiée par CREMONA, au point de vue projectif, est la plus générale développable du 5e ordre.

10. Recherches de Cremona sur la théorie générale des surfaces algébriques et particulièrement sur celle du 3e ordre.

Le monde, qui régulièrement exige d'autant plus qu'il a reçu demandait que l'auteur de l'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* écrivit un ouvrage analogue sur la théorie des surfaces algébriques; les travaux que nous avons analysés dans les deux paragraphes précédents le montraient admirablement préparé pour satisfaire les vœux de ses collègues; mais pour le décider à entreprendre cet ouvrage, il fallait une occasion qui, heureusement, ne se fit pas attendre longtemps.

L'académie de Berlin, dans sa séance du 7 juillet 1864, proposa comme sujet de concours pour le prix STEINER de l'année 1866, de démontrer et de compléter les propositions énoncées par le grand géomètre

1) *Sulla sviluppabile di 5o ordine* (Giorn. di matem. **3**, 1865).

2) *Dimostrazione di alcuni teoremi sulla superficie sviluppabile di 5o ordine enunciati dal prof.* CREMONA (Giorn. di matem. **3**, 1865).

3) *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Journ. für Mathem. **64**, 1865, p. 1—16).

suisse dans son célèbre mémoire *Über die Flächen dritten Grades*[1]). CREMONA se sentit attiré à s'aligner parmi les concurrents; mais au lieu de chercher simplement à demontrer les théorèmes de STEINER, suivant le même ordre d'idées que celui-ci avait adopté, il préféra les faire découler comme des cas particuliers de ceux qui forment la théorie générale des surfaces algébriques, comptant qu'ainsi il aurait pu aussi obtenir d'une manière uniforme les autres propositions sur les mêmes surfaces qu'avaient découvertes auparavant CAYLEY, SALMON, SYLVESTER, SCHLÄFLI, GRASSMANN, AUGUST, BRIOSCHI et CLEBSCH. Le *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, qu'il présenta avant le 1er mars 1866 à ce concours et que l'académie de Berlin jugea digne (comme celui présenté par R. STURM) du prix, est rédigé précisément sur ce plan. „Sie gründet nämlich (dit le rapporteur KUMMER) die Theorie der kubischen Flächen auf eine vorausgeschickte ausführliche Untersuchung über die allgemeinen Eigenschaften der Flächen aller Grade. Die STEINERschen Sätze ergeben sich auf diesem Wege sämtlich als spezielle Fälle allgemeiner Theoreme und es tritt eben deswegen die wahre Bedeutung derselben um so klarer hervor. Auch hat sich der Verfasser nicht darauf beschränkt, die von STEINER und anderen Geometern aufgestellten Sätze über die Flächen dritten Grades zu begründen, sondern hat mehrere wertvolle hinzugefügt, die er selbst gefunden hat.“[2])

Or ces chapitres d'introduction du *Mémoire* de CREMONA furent le germe et le noyau des *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* [74], qui, traduits en allemand par M. CURTZE avec le dit *Mémoire*, et enrichis de nombreuses additions de l'auteur, forment encore à présent le

1) Voici l'énoncé complet de la question de concours: „In einer in den Monatsber. der Akademie vom Jahre 1856, sowie dem 53. Band des CRELLEschen Journ. veröffentlichten Abhandlung hat STEINER eine Reihe von Fundamentaleigenschaften der Flächen dritten Grades mitgeteilt, und dadurch den Grund zu einer reingeometrischen Theorie derselben gelegt. Die Akademie wünscht, daß diese ausgezeichnete Arbeit des großen Geometers nach synthetischer Methode weiter ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde. Dazu würde es zunächst notwendig sein, zuerst die größtenteils nur angedeuteten oder gar fehlenden Beweise der aufgestellten Hauptsätze zu geben; dann aber müßte die Untersuchung auch auf die von STEINER nicht berücksichtigten Fälle, in denen die zur geometrischen Konstruktion der in Rede stehenden Flächen dienenden Elemente zum Teil imaginär sind, ausgedehnt werden. Außerdem ist eine genaue Charakterisierung der verschiedenen Gattungen von Raumkurven, in welchen solche Flächen sich schneiden können, zwar nicht unumgänglich erforderlich, würde aber von der Akademie als eine wichtige Ergänzung der STEINERschen Theorie betrachtet werden“.

2) Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin, Sitzung 5. Juli 1866. Voir aussi l'avant-propos de BORCHARDT au t. 68 de son Journal. Ajoutons ici que le prix STEINER fut donné intégralement à CREMONA le 2 juillet 1874 „als Anerkennung für seine ausgezeichneten geometrischen Arbeiten“.

meilleur livre de texte pour l'étude géométrique des surfaces algébriques: cette traduction[1]) nous apparaît en conséquence comme une édition définitive des *Preliminari*, et mérite ainsi d'être choisie par nous comme base de la courte analyse que nous allons en faire.

Les *Grundzüge* comprennent trois parties divisées respectivement en huit, dix et sept chapitres. Comme dans l'*Introduzione*, l'auteur y étudie exclusivement les propriétés projectives des figures considérées; les raisonnements sont exposés sous forme géométrique, mais au fond de toute la théorie il n'est pas difficile d'apercevoir des considérations algébriques, qu'on reconnaît particulièrement dans les fréquentes (et très ingénieuses) applications du principe de la conservation du nombre.

Dans la 1e partie, après avoir étendu aux cônes les théorèmes sur les courbes planes, CREMONA s'occupe de courbes à double courbure pour parvenir aux célèbres formules de CAYLEY. Il passe ensuite à l'exposé des propositions essentielles de la théorie des surfaces[2]) et, après les avoir appliquées aux quadriques, il traite des systèmes linéaires de surfaces algébriques; puis, faisant des applications on ne peut plus heureuses de l'induction complète, il offre des exemples extrêmement instructifs d'un procédé que les adeptes de la géométrie à n dimensions ont utilisé, en le généralisant. Il n'est non plus permis d'oublier le splendide chapitre qui traite des surfaces réglées, car il contient cette méthode stéréométrique pour établir le théorème de RIEMANN sur la conservation du genre d'une courbe par transformations rationnelles qui a provoqué et excite toujours une admiration enthousiaste[3]).

La 2e partie des *Grundzüge* s'ouvre par une exposition de la théorie des surfaces polaires des points de l'espace par rapport à une surface algébrique, à laquelle, dans ces derniers trente ans, on n'a su faire aucun changement substantiel; en introduisant l'hypothèse que la surface fondamentale soit développable, CREMONA, profitant de conseils que lui avaient

1) *Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen von M. CURTZE.* Berlin 1870.

2) Une addition à cet exposé se trouve dans le théorème suivant: „Si deux surfaces ont en commun le point P, qui soit r_1-ple pour l'une d'elles et r_2-ple pour l'autre, la courbe où elles se coupent aura en P la multiplicité $r_1 r_2$ et ce point produira dans le genre de P une diminution de $\frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2 - 2)$ unités". Il a été énoncé par CREMONA et prouvé par N. SALVATORE-DINO dans sa note *Sul genere delle curve gobbe* (Rend. dell' acc. d. sc. di Napoli 18, 1875, p. 133—136).

3) M. F. LINDEMANN l'a reproduite dans son édition des *Vorlesungen über Geometrie von A. CLEBSCH* (Leipzig 1876), p. 683; on sait que le raisonnement de CREMONA, convenablement présenté, conduit à une formule plus générale; voir WEISS, *Über einen Beweis der ZEUTHENschen Verallgemeinerung des Satzes der Erhaltung des Geschlechtes* (Mathem. Ann. 29, 1887).

donnés CAYLEY[1]) et ZEUTHEN, parvint à projeter une lumière nouvelle sur ces importantes formes géométriques. Il s'occupe ensuite des systèmes linéaires de surfaces algébriques et des figures qu'ils engendrent; quelques-unes des propositions qu'il expose étaient connues auparavant, et quelques autres sont des généralisations assez naturelles de théorèmes connus; mais tout ce qu'on lit dans le chapitre intitulé Complexes symétriques porte la marque d'une originalité si indiscutable qu'on peut dire de notre géomètre qu'il l'a atteinte en d'autres occasions, mais ne la surpassa jamais. Les propriétés des surfaces Hessienne et Steinérienne (dénominations introduites par CREMONA dans la science) en sont de simples corollaires; mais notre géomètre les expose tout au long, car avec raison il les considère comme les bases de toute théorie des surfaces algébriques.

En particularisant ces propositions, CREMONA, dans la 3e partie des *Grundzüge*, arrive à la conclusion que, pour chaque surface du 3e ordre, il en existe une du 4e, douée de dix points doubles et d'un égal nombre de droites, où se superposent l'Hessienne et la Steinérienne; en étudiant avec soin cette surface, il parvient au pentaèdre de SYLVESTER, tandis qu'en appliquant d'autres théorèmes généraux, il arrive aux 27 droites et aux 45 plans tritangents et aux propriétés de la configuration que forment ces éléments. — Un géomètre tel que CREMONA devait prendre un intérêt particulier aux différents procédés de génération d'une surface du 3e ordre, et en effet il fit connaître les plus remarquables et les plus utiles; mais sur l'un d'eux (génération de GRASSMANN par trois gerbes projectives de plans) il s'arrêta assez longtemps, car il conduit à une représentation d'une surface cubique sur le plan, dont ont peut tirer toute la géométrie sur cette surface: CREMONA faisait ainsi les premiers pas sur une route qui devait le conduire plus tard à des pays inconnus avant lui (voir § 12). Et pour épuiser le programme tracé par l'académie de Berlin, il clôt son magistral travail en traitant un ordre de questions dont il ne s'était presque pas occupé auparavant; il s'agit de la classification des surfaces du 3e ordre réelles et générales (c'est-à-dire qu'on peut représenter analytiquement par des équations à coefficients réels); en s'appuyant sur une des générations connues, il arrive à la division de ces surfaces en cinq grandes classes que SCHLÄFLI[2]) avait déjà trouvées à l'aide du calcul[3]).

1) Comp. *Collected mathematical papers* t. 8, p. 76 et 87.

2) *On the distribution of surfaces of the third order into species* (Philos. trans. London **153**, 1863).

3) Dans son mémoire couronné et dans les *Preliminari* CREMONA ne considéra que des surfaces du 3e ordre tout-à-fait générales. Mais dans une autre occasion [90] il cita des cas particuliers qu'on obtient en supposant qu'un ou plusieurs des 45 triangles formés par des droites de la surface se réduisent à un point. Or on sait

CREMONA s'occupa encore de surfaces du 3e ordre après la publication de son mémoire couronné, ainsi que nous allons voir. En 1870 ramené à cette étude par sa collaboration à la traduction allemande des *Preliminari* et probablement attiré par les nouveaux points de vue signalés par CAMILLE JORDAN en appliquant la théorie des substitutions [1]), il chercha un pendant géométrique complet aux résultats de l'éminent géomètre français, et il parvint ainsi [85] à un groupe extrêmement intéressant de propriétés de la configuration formée par les droites d'une surface générale du 3e ordre [2]). Pour établir leur valeur, il suffira de dire que de ces recherches il conclut:

1) la possibilité de répartir ces droites dans les 18 plans d'une des 40 ternes de trièdres conjugués;

2) la notion d'ennéaèdre, groupe de 9 plans tritangents contenant toutes les droites de la surface;

3) la nécessité de distinguer deux espèces d'ennéaèdres et la détermination des nombres (40 et 160) des ennéaèdres de chaque espèce;

4) la découverte des 40 quaternes d'hexaèdres.

Il est bon d'ajouter qu'avec ces recherches CREMONA a tracé les premières lignes d'une belle théorie, dont nous sommes redevables à un de ses éleves les plus distingués, M. E. BERTINI [3]).

A M. VERONESE revient le mérite d'avoir, par ses recherches sur l'*hexagrammum mysticum*, poussé CREMONA, sept ans après, à s'occuper de surfaces cubiques (voir [106]; comp. [105]); le résultat auquel il parvint couronne bien dignement trois lustres de travail fécond! Le but que notre géomètre se proposa était de découvir une voie pour arriver, en traversant l'espace ordinaire, aux théorèmes découverts directement par VERONESE, et il la trouva dans la considération d'une surface du 3e ordre douée d'un point double et des droites qu'elle renferme [4]). Mais il dut reconnaître bientôt que si cette considération est vraiment indispensable lorsqu'il s'agit d'établir par la géométrie de l'espace les propriétés de l'hexagramme de PASCAL, les théorèmes établis en sont tout à fait indépendants, car ils ne présup-

---

que le cas où cette circonstance se présente le plus grand nombre de fois, a été découvert peu après par CLEBSCH (voir § 16 du mémoire *Über die Anwendung der quadratischen Substitution* etc.; Mathem. Ann. **4,** 1871), tandis que ECKARDT a traité plus tard méthodiquement les autres cas (*Über diejenigen Flächen dritten Grades* etc.; Mathem. Ann. **10,** 1876).

1) Voir le grand *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris 1870).

2) JORDAN le cite (Comptes rendus Paris, séance du 14 février 1870).

3) *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti d'una superficie di 3⁰ ordine* (Annali di matem. 12_2, 1884, p. 301—346).

4) Cette méthode semble assez naturelle pour expliquer qu'elle ait été retrouvée après; voir RICHMOND, *A symmetrical system of equations* etc. (Quart. journ. of mathem. **23,** 1888).

posent que l'existence d'un système de 15 plans et de 15 droites; or ces plans forment 6 pentaèdres et 20 trièdres, par couples conjugués, dont les sommets se trouvent par quaternes sur 15 droites; ces sommets et ces droites composent un hexaèdre qui représente le noyau de toute la figure et dont les faces sont coordonnées à ces pentaèdres. CREMONA ajouta la remarque importante que cette figure se présente chaque fois qu'on a 15 droites situées en 15 plans; par conséquence elle se présente 36 fois dans toute surface cubique générale; d'où il conclut l'existence de 36 héxaèdres dans chaque surface du 3e ordre (voir aussi [107]); ces héxaèdres appartiennent à une série infinie déjà considérée par M. REYE[1]), mais ils n'avaient pas été signalés auparavant. Parmi les conséquences qu'on peut en tirer remarquons seulement cette belle construction du pentaèdre d'une surface du 3e ordre: „considérons deux hexaèdres quelconques et les deux développables de la 3e classe (et du 4e ordre) déterminés par leurs faces; ils ont cinq plans tangents communs, qui forment précisément le pentaèdre de SYLVESTER de la surface".

11. Cremona professeur de géométrie descriptive et de géométrie analytique.

A partir de 1861 et pendant six années, CREMONA occupa aussi dans l'université de Bologne (presque toujours comme chargé de cours) la chaire de géométrie descriptive. Le plan, suivant lequel il dirigea ses leçons est[2]) celui entrevu déjà par BELLAVITIS[3]) et que M. FIEDLER a depuis développé complètement; il consiste à introduire et appliquer largement dans l'étude de la géométrie descriptive les idées fondamentales de la géométrie moderne. D'ailleurs l'examen attentif du cours qu'il a fait pendant l'année scolaire 1864—1865[4]) prouve qu'il pensait bien à raison qu'un cours de géométrie descriptive *théorique* devait comprendre toutes les méthodes de représentation connues (méthode de MONGE, perspective, projections côtés, axonométrie); il ajoutait aussi la théorie des ombres, système que nous n'approuvons pas tout-à-fait, en considérant qu'elle forme plutôt un chapitre de la géométrie descriptive *appliquée*. Pour la perspective, il faut remarquer que, sous ce nom, notre géomètre embrassait le corps de doctrine basé sur l'ouvrage célèbre de BROOK TAYLOR, qu'il rajeunit en y introduisant bon nombre d'idées de la géométrie moderne, et en en formant ainsi un tout qui ressemble absolument

---

1) Voir le no 15 du mémoire *Geometrischer Beweis des SYLVESTERschen Satzes* etc. (Journ. für Mathem. 78, 1874).

2) Voyez l'avant-propos des *Elementi di geometria projettiva.*

3) *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova 1851).

4) M. BERTINI qui suivait ce cours, en rédigea un résumé qu'il eut l'extrême courtoisie de mettre à ma disposition.

à la méthode de la projection centrale de M. FIEDLER. Un petit travail pseudonyme [69] — qu'il écrivit pendant qu'il était à la campagne, chez son collègue MAGNI, le célèbre oculiste — fournit une indiscutable preuve de ce que nous venons de dire.

Par arrêté royal du 18 janvier 1863, CREMONA fut nommé professeur de géométrie analytique et descriptive à l'université de Bologne, mais bientôt après (arrêté du 8 avril 1863) il revenait à sa chaire de géométrie supérieure, tout en continuant son enseignement de géométrie descriptive. Ce court séjour dans une chaire de géométrie analytique nous fournit l'occasion de mentionner quelques travaux sur cette matière qui ne rentrent dans aucune autre catégorie de notre cadre. Quelques-uns [42, 44] ne contiennent que l'énoncé de problèmes ou théorèmes relatifs aux applications géométriques de la théorie des formes; leur valeur est prouvée par cela qu'un géomètre tel quel BATTAGLINI ne dédaigna pas de les résoudre ou démontrer [1]; un autre [45] contient un calcul très simple ayant pour but d'établir une formule tout-à-fait élégante pour carrer un segment de section conique, que SYLVESTER avait découverte et que SALMON avait communiquée à notre mathématicien par une lettre du 23 novembre 1863; le calcul de CREMONA eut l'honneur de prendre place dans le plus célèbre traité moderne de géométrie analytique élémentaire [2].

Comme ces publications correspondent à peu près à l'époque où CREMONA fut professeur de géométrie analytique, on pourrait croire que son intérêt pour cette branche des mathématiques fût né et mort en lui avec cette occupation officielle. Rien de plus faux; on peut dire que cet intérêt dura toute sa vie. Pour s'en persuader, le lecteur n'a qu'à se rappeler quels furent les travaux qu'il écrivit dès son arrivée à Cremone ([3], [4], [5], [6], [7]); de cette ville est aussi datée une note [14] ayant pour but de trouver l'équation homogène de la sphère circonscrite à un tétraèdre, tandis qu'à Milan il écrivait un travail plus long [16] contenant des démonstrations d'une rare élégance des théorèmes donnés par CHASLES dans son *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales* [3]; plus tard [62] il se proposa d'appliquer les coordonnées cartésiennes à établir une formule assez remarquable de MANNHEIM. Dans les premiers jours de sa résidence à Bologne il écrivit — en dehors d'un travail dont nous avons déjà parlé [21] et d'une analyse élogieuse du plus grand ouvrage didactique de HESSE [31] — un autre [20] „coll' unico scopo di attirare l'attenzione di qualche benevole lettore su una teoria che promette di

1) Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 311—316, 370—378.

2) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl. (Leipzig 1903), p. **743**.

3) Comptes rendus Paris **50**, 1860, p. 623—633.

essere feconda quanto è quella de' luoghi omofocali, di cui la prima può derivarsi mediante la trasformazione polare". Les premières lignes de cette nouvelle théorie ont été tracées par O. TERQUEM[1], mais c'est CHASLES qui en fournit les éléments les plus importants[2]); elle a pour base la considération des couples de droites coupant une conique suivant quatre points d'un même cercle, mais il faut reconnaître qu'elle s'est montrée bien moins importante qu'elle ne le paraissait à son début. CREMONA en donna une belle exposition élémentaire; bornons-nous à signaler qu'on y trouve le systeme de coordonnées, pour les droites d'un plan, corrélatif à celui des coordonnées elliptiques ordinaires. Une addition qu'on trouve dans un autre travail [61], prouve qu'il continua à s'occuper plus tard du même sujet.

Mais de tous les mémoires de géométrie analytique dus à CREMONA, le plus original et le plus important est le dernier qu'il écrivit à Bologne [73]; le lecteur reconnaîtra que nous avons raison de penser ainsi en lisant l'énoncé des théorèmes qu'il renferme, que voici: „Soit

$$\begin{aligned} F(x,y) &= y^2(ax^2+2bx+c)+2y(a'x^2+2b'x+c')+(a''x^2+2b''x+c'') \\ &= x^2(ay^2+2a'y+a'')+2x(by^2+2b'y+b'')+(cy^2+2c'y+c''); \end{aligned}$$

$X(x)$ et $Y(y)$ soient les discriminants de F suivant qu'on la considère comme fonction de y ou de x; X et Y sont deux formes biquadratiques ayant les mêmes invariants".

Cette proposition est aujourd'hui bien connue par des travaux de MM. CAPELLI[3]) et ZEUTHEN[4]); CREMONA déclare qu'il ignore si quelqu'un l'a découverte avant lui et nous aussi n'avons pu la trouver énoncée dans aucune publication antérieure à l'an 1867; jusqu'à preuve contraire, nous la considérons en conséquence comme un théorème de CREMONA. Notre auteur dit qu'on pourrait la prouver par un calcul directe des invariants des formes $X(x)$ et $Y(y)$; mais il en développe une démonstration si belle qu'il faut que nous en donnions ici une idée. Supposons, comme il est permis, $c''=0$, $F(x,y)=0$ est alors l'équation d'une quartique passant par l'origine des coordonnées et ayant des points doubles à l'infini des axes; changeant x, y respectivement en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, cette courbe se transforme en une cubique passant par ces mêmes points à l'infini, et les équations $X\left(\frac{1}{x}\right)=0$, $Y\left(\frac{1}{y}\right)=0$ représentent les quatraines des tangentes à cette nouvelle courbe parallèles aux axes; or on sait que ces quatraines sont projectives, donc etc.

1) *Sur les lignes conjointes dans les coniques* (Journ. de mathém. **3**, 1838).

2) *Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques* (Journ. de mathém. **3**, 1838, p. 385—434).

3) *Sopra la corrispondenza (2,2)* etc. (Giorn. di matem. **17**, 1879, p. 69).

4) *Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe* (Proc. of the London mathem. soc. **10**, 1879, p. 196—204).

12. Cremona à l'institut technique supérieur de Milan.

F. BRIOSCHI, qui depuis 1863 était le chef de l'institut technique supérieur de Milan, pensa en 1867 qu'il était nécessaire d'introduire dans l'enseignement des futurs ingénieurs ces méthodes graphiques que CULMANN avait imaginées et que, aidé par T. REYE, il répandait de sa chaire au Polytechnicum de Zürich; et il lui sembla que personne en Italie ne convenait mieux que CREMONA pour occuper cette place de bataille[1]); en conséquence, sur sa proposition, par arrêté ministeriel du 16 octobre 1867, celui-ci fut chargé (comandato) du cours de géométrie supérieure à Milan (il ne reçut que le 9 novembre 1872 le titre de professeur ordinaire). Ainsi finit une nouvelle période de la vie de notre mathématicien, qui avait duré sept années, et qui, du point de vue strictement mathématique, est sans doute la plus heureusement féconde de toute son existence.[2])

Le changement de résidence de Bologne à Milan exerça une modification radicale sur la direction générale des idées et des recherches scientifiques de CREMONA. D'un côté, son séjour dans un institut ayant un but professionnel et l'obligation où il fut d'enseigner la statique graphique, le conduisirent à des recherches ayant trait à des applications, dont il s'était toujours tenu éloigné auparavant; d'ailleurs le contact quotidien avec le grand analyste qu'était son ancien maître BRIOSCHI, l'entraîna insensiblement à abandonner la géométrie du type de CHASLES et STEINER, pour se tourner vers les méthodes plus algébriques, qui avaient alors CLEBSCH comme leur plus illustre et leur plus fécond protagoniste.

Pour se former une idée des concepts directeurs choisis par CREMONA en traçant le plan de son cours à l'école polytechnique de Milan, on n'a qu'à parcourir les lithographies qu'on en fit pour servir aux étudiants pendant les années 1867—68 et 1868—69[3]). Ces deux rédactions se trouvent en général d'accord; chacune est divisée en trois groupes de leçons, dont l'un comprend la *géométrie de position*, le second le *calcul graphique* et le troisième la *statique graphique;* mais, tandis que, pour les deux derniers, CULMANN est toujours conseillé comme livre de texte, pour le premier STAUDT est indiqué une fois et ZECH une autre; enfin dans la rédaction plus récente, les applications sont plus développées et nombreuses que dans la première.[4]) Or nous allons prouver

1) „L'Italia può gloriarsi d'avere, per la prima, data ospitalità alle nuove idee, e coll' insegnamento e con pubblicazioni originali ed illustrative. In breve volgere d'anni la geometria projettiva e la statica grafica divennero tra noi materia di studio ordinario, ed oggi non vi ha più alcun ingegnere, laureato dopo 1870, che non sia padrone de' metodi grafici.“ Voilà comment s'exprimait notre mathématicien, en mars 1888, dans la préface à La statica grafica (Parte I, Milano 1888) de M. SAVIOTTI.

2) Comparez en effet la liste à la fin de notre article.

3) C'est à l'obligeance de M. JUNG que je dois de les avoir pu examiner chez moi.

4) Comme ce cours est souvent cité (voir p. ex. JUNG, *Encyklop. der mathem. Wiss.*,

que pour chacune des trois parties du cours professé à Milan par CREMONA, il existe des traces visibles des empreintes personnelles qu'il y a laissées.

En octobre 1874 le gouvernement italien imposa de nouveaux programmes pour l'enseignement des instituts téchniques (Obere Realschulen); parmi les nouveautés introduites, remarquons celle (conseillée probablement par CREMONA lui-même) de la théorie des sections coniques basée sur les notions de rapport anharmonique et d'involution. Or pour cette nouvelle branche d'instruction mathématique, il n'existait alors en Italie aucun livre de texte; qui mieux que CREMONA aurait pu le rédiger, mieux que lui qui depuis une

---

t. 4_1 : 3, p. 299, 314) et qu'il a servi de modèle pour plusieurs des cours analogues faits en Italie, je crois utile de donner ici la table des matières traitées, d'après la rédaction la plus récente:

1. *Géométrie de position.*

1. Formes géométriques fondamentales. 2. Systèmes harmoniques. 3. Formes projectives. 4. Involution. 5. Génération des coniques. 6. Théorie des pôles et des polaires. 7. Centre et diamètres des coniques. 8. Exercices et constructions. 9. Théorème de DESARGUES. Formes projectives dans les coniques. 10. Exercices et constructions. 11. Problèmes du 2d degré. 12. Foyers des coniques. 13. Quelques autres problèmes et constructions. 14. Cônes et surfaces du second ordre réglées. 15. Exercices. 16. Propriétés des formes géométriques fondamentales de la 2e espèce. 17. Affinité et similitude des figures planes. 18. Exercices. 19. Génération des surfaces du 2d ordre. 20. Pôles et plans polaires par rapport à une surface du 2d ordre. 21. Diamètres, centre, axes. 22. Affinité, similitude, congruence et symétrie des figures solides. 23. Exercices.

2. *Calcul graphique.*

1. Addition et soustraction des lignes droites. 2. Multiplication ou division d'une droite par un rapport. 3. Élévation à puissances et extraction de racines. 4. Multiplication de droites entre elles. 5. Transformation des aires dont le contour est rectiligne. 6. Tables graphiques. 7. Transformation des figures circulaires. 8. Transformation des figures curvilignes en général. 9. Théorie du planimètre. 10. Cubature de masses régulières. 11. Cubature de masses irrégulières. 12. Calculs graphiques relatifs aux transports des terres.

3. *Statique graphique.*

1. Composition des forces appliquées à un point. 2. Composition de forces placées arbitrairement dans un plan. 3. Correspondance projective entre le polygone des forces et le polygone funiculaire. 4. Exemples et cas particuliers. 5. Moments de forces dans un plan. 6. Couples. 7. Équilibre des forces d'un plan. 8. Composition des forces dans l'espace. 9. Forces parallèles dans un plan. 10. Centres de gravité. 11. Moments d'inertie. 12. Ellipsoïde central. 13. Ellipsoïde d'inertie. 14. Système de forces parallèles dont les intensités sont proportionnelles aux distances des points d'applications d'un plan. 15. Ellipse d'inertie. 16. Système de forces parallèles, agissant sur une région plane, dont les intensités sont proportionnelles aux distances d'un axe neutre. 17. Construction de l'ellipse centrale et du noyau d'une figure plane. 18. Ellipse centrale et noyau profil d'un *rail.* 19. Ellipse centrale et noyau d'un fer à angle. 20. Distribution des forces intérieures dans les sections d'une travure. 21. Application à une travure métallique encadrée à une de ses extrémités.

dizaine d'années exposait de sa chaire les nouvelles méthodes géométriques et par de nombreuses et brillantes applications prouvait qu'il en connaissait jusqu'au fond la nature et l'art de les manier? Notre géomètre sentit le devoir qu'il avait à remplir et s'y prépara. C'est ainsi que naquirent les *Elementi di geometria projettiva* [101], qui, quoique arrêtés au 1er tome [1]) furent vivement appréciés en Italie et à l'étranger [2]), servirent longtemps chez nous à l'enseignement supérieur et furent traduits dans les principales langues [3]); ils sont en conséquence tellement connus qu'il est tout-à-fait inutile d'en faire ici une nouvelle analyse et d'en décrire complètement le plan; nous nous bornerons donc à quelques simples remarques. Relativement au nom employé par CREMONA pour désigner la branche de mathématique qu'il traite, il faut noter qu'il a écarté ceux de *géométrie supérieure* et de *géométrie moderne*, alors en usage, car ils exprimaient des idées trop relatives et passagères, et aussi ceux de *géométrie de position* et de *géométrie dérivée*, dont le premier semblait exclure la considération des relations métriques et le second était d'une signification trop large; alors, pour embrasser l'ensemble des théories ayant comme germe le *Traité des propriétés projectives des figures*, il emprunta à KLEIN le nom de *Géométrie projective* [4]), en le prenant toutefois dans un sens très différent: cette décision obtint l'approbation générale. Relativement à la méthode nous observerons que CREMONA, tout en s'écartent de la route frayée par STAUDT, qui exclut complètement la considération de rapport anharmonique, fit de cette notion un usage un peu plus restreint de ce qu'en avaient fait MÖBIUS, STEINER et CHASLES; il ne suivit non plus STAUDT dans la théorie des imaginaires, car il exclut cette théorie, en préférant de remarquer pour chaque problème du second degré qu'il peut avoir 2, 1 ou 0 solutions. Ajoutons que c'est depuis la publication des *Elementi di geometria projettiva* qu'on a rigoureusement suivi le système de désigner les points par les lettres grandes $A, B, C, \ldots$, les droites par les lettres petites $a, b, c, \ldots$ et les plans par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Les partisans de la fusion de la planimétrie avec la stéréométrie y remarqueront avec plaisir la suivante déclaration: „Le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di

1) Le 2d tome était déjà commencé lorsque survinrent des changements radicaux dans l'organisation des instituts techniques; CREMONA interrompait alors un travail ingrat, dont il ne voyait plus le but.

2) Voyez les analyses qu'en firent M. ZEUTHEN (Bullet. d. sc. mathém. **5**, 1873, p. 10—15) et BERTINI (Period. di scienze mat. e nat. per l'insegnamento secondario, **1**, 1873, p. 26—27); quelques inexactitudes signalées par le premier ont été corrigées par l'auteur même (voir vol. dernièrement cité p. 56—58).

3) *Eléments de géométrie projective*, trad. par DEWULF (Paris 1875); *Elemente der projectivischen Geometrie;* deutsch von TRAUTVETTER (Stuttgart 1882); *Elements of projective geometry;* translated by C. LEUDESDORF (2d ed., Oxford 1894).

4) Mathem. Ann. **4**, 1871, p. 573.

malagevole dimostrazione", et tout le monde accordera une grande admiration à l'éminent géomètre qui sut tirer la moelle des ouvrages de ses prédécesseurs pour en former un tout homogène, ayant une physionomie bien nette.

Les belles qualités, si répandues dans les *Elementi di geometria projettiva,* se retrouvent dans un petit ouvrage, que CREMONA publia peu apres [102], et que, si j'osais hasarder une hypothèse, je considérerais comme ayant avec le précédent une relation identique à celle que la *Geometrie der Lage* de STAUDT aurait eue avec la *Geometrie des Maasses* qu'il avait projétée. En effet dans les *Elementi di calcolo grafico* se trouvent recueillies et coordonnées toutes les notions et les propositions qui rendent possible le remplacement d'un calcul arithmétique par un diagramme convenablement choisi. Ils commencent par une exposition complète du principe des signes pour les segments rectilignes, les angles et les volumes, puis on y trouve les méthodes graphiques pour effectuer exactement toutes les opérations arithmétiques et pour résoudre, avec telle approximation que l'on voudra, toute équation algébrique. La question traitée ensuite a un intérêt théorique et pratique; elle a occupé aussi les anciens géomètres, qui tracèrent les premieres lignes de sa solution; c'est le problème de la transformation des aires; problème qu'on peut résoudre exactement lorsque le contour est rectiligne et par approximation dans les autres cas. La dernière des questions résolues par CREMONA se trouve sur la limite entre la géométrie et la mécanique; c'est la détermination graphique des centres de gravité; son importance est telle que CREMONA y a consacré avec raison plusieurs développements. Les traductions qui même récemment[1]) honorèrent les *Elementi di calcolo grafico* prouvent que, aujourd'hui encore, on les considère comme la meilleure introduction aux méthodes de CULMANN.

Le troisième des travaux de CREMONA liés à son enseignement au polytechnicum de Milan est encore plus original que les deux autres; il a pour objet la théorie des figures réciproques qu'on rencontre dans le statique graphique. Publié d'abord (1er juin 1872) à l'occasion des noces de la fille de BRIOSCHI, il fut bientôt réimprimé et sept ans après une nouvelle édition fut jugée nécessaire et parut en effet[2]) par les soins de M. JUNG [99]. Pour comprendre et mésurer la valeur de l'innovation introduite par notre géomètre dans la dite théorie, il est nécessaire de se rappeler que CLERK MAXWELL avait observé le premier que le polygone des forces et le polygone funiculaire (qui sont deux figures corrélatives)

1) *Elemente des graphischen Kalkuls;* deutsch von M. CURTZE (Leipzig 1876). *Graphical statics. Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics;* translated by H. BEARE (Oxford 1890).

2) Il a aussi été traduit en anglais (voir ci-dessus) et en français.

peuvent être considérés comme les projections orthogonales de deux polyèdres qui, *après rotation de l'un d'eux de 90⁰ autour d'un axe convenablement choisi*, sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution. Or CREMONA découvrit que ces deux polygones peuvent aussi être considérés comme les projections orthogonales de deux polyèdres qui, *dans leur position*, se correspondent par rapport à un complèxe linéaire. „Wenn es daher (dit un juge compétent) [1]) auch nicht so wichtig ist, ob bei der Herstellung des reciproken Kräfteplanes das Rotationsparaboloid oder das Nullsystem zu Grunde gelegt wird, so ist doch immerhin durch die Einführung des Nullsystems und die Vermeidung der Drehung des Kräfteplanes in theoretischer Richtung eine Abrundung erzielt.“ CREMONA est donc justement considéré comme un des „Begründer der Fachwerktheorie“[2]). Et les adeptes de la géométrie de la droite dans l'espace lui sont reconnaissants, car, après leur avoir appris une élégante représentation des droites sur un certain système formé par ∞^4 coniques d'un plan[3]) [100], par une application pratique inattendue et importante, il documenta la valeur d'une branche de géométrie qui poussait alors ses premières fleurs.

13. Travaux de Cremona sur les courbes au point de vue du genre.

L'action didactique de CREMONA à l'institut technique supérieur de Milan ne resta pas entre les bornes indiqués dans le paragraphe précédent; car à cette époque l'établissement dirigé par BRIOSCHI comptait une école normale destinée à former des professeurs pour les instituts techniques[4]), et CREMONA fut chargé d'y faire des leçons et des conférences de mathématiques supérieures. Parmi ceux qui eurent le bonheur de les écouter, notons A. ARMENANTE, G. ASCOLI, E. BERTINI, G. JUNG, M. MISANI et EM. WEYR. Les plus célèbres de ces leçons furent celles que CREMONA fit durant l'année scolaire 1868—69, conjointement à BRIOSCHI et CASORATI, sur la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes. Du résumé qu'on en a publié[5]), il résulte que, tandis que BRIOSCHI s'était inspiré de JACOBI et CASORATI de RIEMANN, CREMONA prit pour guide la *Theorie der ABELschen Functionen* de CLEBSCH et GORDAN.

1) HENNEBERG, *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften* **4**, p. 363.

2) HENNEBERG, article cité p. 366; voyez aussi HAUCK, *Über die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Journ. für Mathem. **100**, p. 366).

3) Ce sont les coniques circonscrites aux triangles circonscrits à une conique fixe.

4) Voir l'art. 16 de l'arrêté royal du 6 mars 1863, par lequel fut fondé le polytechnicum de Milan.

5) A. ARMENANTE e G. JUNG, *Relazione sopra tre corsi paralleli dei professori BRIOSCHI, CREMONA e CASORATI sulla teoria delle funzioni ellittiche e abeliane.* Giorn. di matem. **7**, 1869, p. 224—234.

Dans la 1ère partie de son cours il exposa, suivant la méthode qu'il avait déjà adoptée dans son *Introduzione*, les théorèmes fondamentaux sur les courbes planes algébriques; dans la 2e, il fit connaître les trois premières sections de cette *Théorie*, en lui donnant un aspect un peu plus géométrique; et dans la 3e, pour prouver l'importance hors ligne du théoreme d'ABEL, il exposa les magnifiques recherches que CLEBSCH avait réunies dans ses célèbres mémoires des tomes **64** et **65** du Journal für Mathematik. Si nous ne nous trompons pas, c'est la 2e partie qui offre un plus grand intérêt de nouveauté; elle fournit à CREMONA le sujet d'un mémoire étendu [86], où, à l'aide de considérations géométriques, il arriva, par une voie différente de celle de CLEBSCH et GORDAN, à la réduction des intégrales abéliennes à leurs trois formes typiques, et au théorème d'ABEL.

Une originalité encore plus grande caractérise deux autres travaux, ayant aussi leur origine dans ce cours, et dont nous devons dire quelques mots.

Les coordonnées des points d'une courbe hyperelliptique du genre p, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre λ et de la racine carrée d'une fonction entière $Q(\lambda)$ du degré $2p + 2$. CLEBSCH et GORDAN, dans leur ouvrage cité, apprennent à réduire les courbes hyperelliptiques des genres $p = 1$ ou 2 à leurs formes typiques; or CREMONA, généralisant le procédé analytique adopté par ces auteurs, et en employant une transformation de JONQUIÈRES convenable, prouva [1]) [82] que, quel que soit le genre p, une courbe hyperelliptique du genre p peut se transformer en une courbe de l'ordre $p + 2$ à un seul point singulier p-ple M, jouissant de ces deux propriétés: 1) chaque tangente à la courbe au point M coupe celle-ci en $p + 2$ points coïncidents en M; 2) on peut mener de M à la courbe $p + 2$ droites tangentes ailleurs, leurs points de contact se trouvant sur une droite m. La courbe transformée est homologico-harmonique par rapport au centre M et à l'axe m; elle a $8p$ points d'inflexion et $8p(p-1)$ tangentes doubles. — Remarquons qu'à la classe des courbes hyperelliptiques appartiennent les quartiques douées d'un point double; CREMONA s'en occupa occasionnellement [90] dans l'hypothèse qu'elles fussent homologico-harmoniques, et en détermina leurs coniques quadritangentes et leurs tangentes doubles, en s'aidant de considérations de géométrie de l'espace, signalées auparavant par M. GEISER[2]).

Dans l'avant-propos de leur *Théorie*, que nous venons de citer plusieurs fois, CLEBSCH et GORDAN ont fait allusion à la question de savoir

---

1) Comp. CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, 1 Bd. (Leipzig 1876), p. 720.

2) *Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades* (Mathem. Ann. **1**, 1869, p. 509).

si le nombre des modules d'une courbe du genre p est $3p - 3$, comme avait dit RIEMANN dans le § 12 de sa *Theorie der ABELschen Functionen*, ou bien $4p-6$, comme croyait CAYLEY [1]); cette question est depuis longtemps résolue, car CAYLEY non seulement a reconnu son erreur, mais il en a découvert la cause [2]). Toutefois, antérieurement à cet événement, CREMONA, en collaboration avec CASORATI, se proposa [83] de chercher quelques raisons en faveur de l'une ou de l'autre de ces questions, et il se plaça du côté de la vérité, car il établit, à l'aide de considérations directes, l'exactitude de la formule de RIEMANN pour $p = 5$ ou 6 [3]). Si l'on fait attention à l'époque où elle fut écrite et aux procédés qui y sont employés, on verra sans peine que cette note n'est pas indigne de figurer parmi les travaux de notre géomètre.

14. Transformations rationnelles de l'espace; leur application à la représentation plane des surfaces.

Les mémoires de CREMONA, que nous venons d'analyser, sont toutes des preuves du courant sympathique d'idées existant alors entre lui et son ami CLEBSCH (comp. [96]); d'autres preuves vont résulter de l'analyse de ceux qui vont nous occuper maintenant.

Le 21 juillet 1866 CLEBSCH annonçait à CREMONA qu'il avait découvert „durch Integration" que les lignes asymptotiques d'une surface de STEINER sont des courbes gauches du 4^e ordre et de la 2^e espèce [4]). La beauté de ce résultat fit naître en notre mathématicien le désir d'y parvenir par une voie géométrique et dès le 25 septembre de la même année il pouvait annoncer à son ami qu'il venait d'atteindre son but. L'artifice qu'il employait à cet effet consiste dans la représentation de la surface sur un plan, représentation qui résulte de la première communication de WEIERSTRASS sur cette surface, mais que CLEBSCH (voir le mémoire cité tout-à-l'heure) et CREMONA [72] ont les premiers (et indépendamment l'un de l'autre) développée et appliquée. Les lois de cette représentation sont aujourd'hui si connues qu'il n'est pas nécessaire de les rappeler ici; mais les subtils raisonnements par lesquels CREMONA parvint à la représentation et à la nature des lignes asymptotiques de la surface dont il s'agit, méritent d'être signalés honorablement. CREMONA (non moins que

---

1) *On the transformation of plane curves* (Proc. of the London mathem. soc. **1**, 1865, p. 1).

2) *Note on the theory of invariants* (Mathem. Ann. **3**, 1871, p. 268).

3) Le cas de $p=4$ avait été déjà épuisé par A. BRILL (Mathem. Ann. **1**, 1869, p. 401).

4) Voyez en effet le mémoire *Über die STEINERsche Fläche*, qui porte la date 24 juillet 1866 et fut publié dans le premier cahier du t. **67** (1867) du Journ. für Mathem.

CLEBSCH) remarqua le cas particulier de la surface de STEINER correspondant à l'hypothèse que deux des droites doubles coïncident, et il ajouta celui, encore plus spécial, où toutes les trois se superposent; et en ayant observé que les surfaces réglées du 3e degré peuvent se représenter sur le plan d'une manière analogue, il arriva aussi à découvrir les lignes asymptotiques de toutes ces surfaces[1]).

Or ce dernier résultat, certainement remarquable en soi, nous apparaît très important si l'on considère qu'il fut le point de départ des nouvelles recherches, couronnées d'un complet succès, que notre auteur fit [80] sur les surfaces réglées $[m, n]$ de l'ordre $m + n$, douées chacune de deux directrices rectilignes, de multiplicités m et n et de $(m-1)(n-1)$ génératrices doubles. Une telle surface est rationnelle; ses lignes asymptotiques sont toujours algébriques, de l'ordre $2(m + n - 1)$, si les deux directrices sont différentes et de l'ordre $2m + n - 2$, lorsqu'elles coïncident. CREMONA parvint à ces conséquences à travers une foule de considérations et de calculs, où je ne sais ce qu'on doit admirer le plus, la rigueur du raisonnement géométrique ou l'élégance du procédé analytique. Ce qu'il ne faut pas oublier de signaler particulièrement, c'est le moyen employé pour arriver à la représentation sur un plan d'une surface; tandis que, d'ordinaire, pour y parvenir on part de la considération de l'ordre et de la multiplicité de ses lignes et de ses points singuliers, ou bien on transforme d'une manière convenable son équation, CREMONA, ayant avant tout prouvé qu'une surface $[m, n]$ est toujours rationnelle, et généralisant les lois de représentation d'une surface $[2, 1]$, arrive à la représentation générale cherchée; c'est un artifice logique qui mérite d'être considéré, car il peut servir en d'autres cas analogues.

Dans son mémoire sur la surface de STEINER, CLEBSCH obtint les équations différentielles des lignes asymptotiques, et il les intégra. Cette importante application de la représentation plane d'une surface à la résolution d'un problème métrique donna à CREMONA l'idée de chercher si, en général, pour une surface rationnelle, on aurait pu résoudre assez aisément les plus importantes questions de cette espèce. Et en effet, dans un travail très peu connu [88], il trouva, pour toute surface algébrique, dont la représentation univoque sur le plan soit donnée, les équations différentielles des courbes isotropes, des lignes asymptotiques et des lignes de courbure, et il ajouta des remarques utiles pour leur intégration[2]).

1) Ce sont des quartiques d'une espèce particulière que CREMONA étudia *ex-professo* un peu plus tard [78].

2) CREMONA observa que toute surface algébrique a toujours au moins deux lignes de courbure algébriques; c'est-à-dire sa section par le plan à l'infini et sa ligne de contact avec la développable circonscrite à la surface et au cercle imaginaire à l'infini. Ces propositions sont elles nouvelles?

Ces équations générales furent établies par CREMONA (c'est lui qui l'a déclaré) en vue d'applications renvoyées à des occasions futures, qui malheureusement ne se présentèrent plus; mais dans le mémoire dont il s'agit [88], il s'arrêta aux surfaces du second degré, et parvint ainsi à des théorèmes sur leurs lignes de courbure, dont la substance remonte à MONGE, mais qui se présentent sous une forme si belle qu'il est à souhaiter que quelque géomètre applique les formules générales de CREMONA à des surfaces moins connues que les quadriques.

On sait que le mémoire sur la surface de STEINER est bien loin d'être le seul que CLEBSCH ait consacré à la représentation d'une surface sur le plan; en dehors de plusieurs autres exemples remarquables, il a composé un travail très étendu, aujourd'hui classique, sur la théorie générale de cette représentation[1]). Impressionné par la grandeur de ces recherches, CREMONA voulut leur apporter quelques contributions; et, dans une note communiquée à la société de Gottingue le 3 mai 1871, il signala une méthode extrêmement féconde, pour découvrir des surfaces rationnelles et leur représentation sur un plan. Elle consiste dans l'application d'une transformation rationnelle de l'espace à une surface rationnelle déjà connue; CREMONA a considéré tout particulièrement la transformation dans laquelle aux plans de l'espace correspondent ∞^3 surfaces du 3ᵉ ordre passant toutes par une même courbe du 6ᵉ ordre et les transformations qui en sont des cas particuliers. De cette manière il put représenter sur un plan et étudier plusieurs surfaces remarquables, dont *une* du 4ᵉ ordre, *six* du 5ᵉ, *cinq* du 6ᵉ, *quatre* du 7ᵉ et *une* du 8ᵉ.

Poursuivant dans le même ordre d'idées, il remarqua [92] que la surface du 4ᵉ ordre à conique double peut s'obtenir d'une surface du 3ᵉ ordre en lui appliquant la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1\, y_2 : y_1\, y_3 : y_2\, y_4 - y_3^2;$$

d'où il suit une nouvelle méthode pour étudier cette surface., à l'aide d'une représentation plane. Et si l'on applique la même transformation à une surface du second ordre, on parvient [93] à un nouveau cas particulier de la même surface, échappé même à KORNDÖRFER; c'est le cas où la surface a, sur la conique double, un point singulier par lequel passent quatre droites de la surface, situées dans le même plan.

Neuf ans après, CREMONA fit de cette transformation quadratique de l'espace une autre importante application [112], c'est-à-dire à l'étude d'une surface du 4ᵉ ordre ayant comme seule singularité un point double uniplanaire, où la surface est tangente à elle-même. Une telle surface, qui avait été signalée

1) *Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano* (Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 1_2, 1868). *Über die Abbildung algebraischer Flächen* (Mathem. Ann. **1**, 1869).

par NOETHER dans une communication faite à la societé de Gottingue le 7 juin 1871, appartient à un célèbre groupe de surfaces rationnelles du 4e ordre dépourvues de lignes multiples et de points triples 1). En un cas particulier elle avait été rencontrée auparavant par CREMONA lui-même [91]; l'étude qu'il fit du cas général peut passer pour complète et définitive.

Non moins remarquable est une autre application qu'il signala des mêmes idées; ayant remarqué que, tandis qu'on connaît un grand nombre de surfaces rationnelles douées de lignes doubles, on n'en connaît presque pas de douées de lignes cuspidales, il se proposa de combler cette regrettable lacune. A cet effet, développant des idées qu'il avait esquissées ailleurs (voir [91], pag. 215, lignes 3—5), il parvint [97] à deux surfaces rationnelles de la dite espèce et à leur représentation sur un plan. Une de ces surfaces résulte de l'application d'une transformation cubique à une quadrique, l'autre d'une transformation quadratique à une surface du 3e ordre douée de point double. La première est la surface (du 5e ordre et de la 3e classe) réciproque de la surface du 3e ordre douée d'un point double uniplanaire; tandis que l'autre est une surface du 4e ordre douée de conique cuspidale, dont il établit le premier les propriétés caractéristiques.

Avant de considérer comme épuisée notre analyse des contributions que CREMONA a données à la théorie de la représentation univoque d'une surface sur un plan, rappelons que CLEBSCH (voir les mémoires cités ci-dessus) et CAPORALI 2) ont indiqué, avec tous les détails désirables, comment on peut découvrir toutes les propriétés descriptives d'une surface rationnelle, dont on connaît la représentation plane; or CREMONA n'a pas jugé indigne de lui d'appliquer ce procédé à un exemple extrêmement instructif (voir [117] et [118]). Il supposa donné un système de courbes du 6e degré ayant en commun six points doubles, dans lesquels les tangentes forment des involutions données, et il établit qu'elles sont les images des sections planes de la surface corrélative à la surface générale du 3e ordre.

Nous avons vu que l'instrument employé toujours par CREMONA pour arriver à des surfaces rationnelles consiste dans l'application de transformations birationnelles de l'espace. C'est une théorie qui est la généralisation naturelle de celle des transformations crémoniennes du plan, et qui a été cultivée avec succès presque en même temps par CAYLEY et NOETHER 3).

---

1) NÖTHER, *Über die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Mathem. Ann. **33**, 1889).

2) *Sopra i sistemi triplamente infiniti di curve algebriche piane* (Collectanea mathem., Milano 1881).

3) CAYLEY, *On the rational transformation between two spaces* (Proc. of the London mathem. soc. **3**, 1869). NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Mathem. Ann. **2**, 1870) et *Über die eindeutigen Raumtransformationen* (Mathem. Ann. **3**, 1871).

A cet ordre d'investigations ne pouvait rester étranger notre mathématicien; et, en effet, au printemps de 1871, il fit à l'Istituto Lombardo deux communications importantes sur ce sujet ([94], [95]), et l'année suivante il les refondait, en les complétant du côté théorique, pour former son célèbre mémoire *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*[1]) [98]; comme ce mémoire est demeuré inachevé, on ne peut omettre de tenir compte encore de ces deux communications si on veut se former une idée complète de ce que CREMONA a fait sur ce sujet.

On sait que, pour établir la théorie des transformations birationnelles entre deux espaces, CREMONA part d'un système d'équations du type suivant

$$1)\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

où les φ sont quatre fonctions homogènes en y_1, y_2, y_3, y_4 de même degré ν. Ce système fait correspondre à tout point d'un espace (y) un point de l'espace (x); et si l'on suppose qu'en résolvant le systeme (1) il en naisse un analogue:

$$2)\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

où les ψ sont des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 du même degré μ, inversement à tout point de (x) correspondra un point déterminé de (y). Dans cette correspondance (μ, ν), au plan d'un des espaces correspondent dans l'autre ∞^3 surfaces formant un système tel que trois quel qu'ils soient de ses éléments se coupent en un seul point variable: pour un tel système CREMONA proposa (et tout le monde l'adopta) le nom d'*homaloïdique*, que SYLVESTER avait déjà employé dans le sens de linéaire[2]). Un système homaloïdique quelconque détermine une transformation rationnelle entre deux espaces et par suite un autre système analogue *conjugué* du premier; la théorie des transformations rationnelles est ainsi réduite à l'étude des systèmes homaloïdiques. Tout système de cette nature a une surface Jacobienne, dont la considération est essentielle et dont les singularités furent déterminées par NÖTHER analytiquement et par CREMONA géométriquement. Mais ce dernier ajouta une remarque de la plus grande valeur, dont personne ne peut lui contester la priorité absolue, c'est qu'il est possible d'obtenir tous les systèmes homaloïdiques auxquels appartient une surface rationnelle donnée Φ. La méthode qu'il a imaginée pour cela, permettant de multiplier à l'infini le nombre des surfaces rationnelles et des transformations birationnelles, est extrêmement féconde et représente peut-être le sommet le plus élevé de sa production géométrique: on peut croire qu'il reconnut très bien toute la valeur de sa découverte, car il jugea

---

1) Comp. aussi la dernière partie de [91], et DEWULF, *Des transformations rationnelles dans l'espace. Travaux de M. CREMONA* (Bullet. des sc. mathém. 7, 1874, p. 37—48). Du même mémoire [98] il existe une traduction tchèque due à EM. WEYR.

2) *On certain general properties of homogeneous functions* (Cambridge and Dublin mathem. journ. 6, 1851, p. 1).

utile de l'illustrer par un grand nombre de belles applications, dont nous allons faire un court résumé.

En supposant que Φ soit une surface du 2[d] ordre, CREMONA parvient à trois transformations du 2[d] ordre dont les inverses sont respectivement des ordres 2, 3 et 4. Si Φ est une surface réglée du 3[e] degré, on parvient à trois nouvelles transformations des types (3, 3), (3, 4), (3, 5); tandis que si Φ est encore du 3[e] degré, mais non réglée, on arrive à des transformations du 2[e] degré dont les inverses sont une du 3[e] degré, une du 4[e], deux du 5[e] et deux du 6[e]; introduisant l'hypothèse que la surface du 3[e] degré Φ ait un point double, on trouve des transformations du 3[e] degré dont les inverses sont des degrés 3, 6, 7, 8, 9; si Φ en a deux, on parvient à sept transformations nouvelles; et si enfin elle en a trois, à quatre autres. De nouveaux cas étudiés par CREMONA dans ses plus anciennes publications sur le même sujet reposent sur l'hypothèse que Φ soit une surface du 3[e] ordre douée d'un point uniplanaire, ou bien une surface de STEINER ou enfin une surface de 5[e] ordre ayant une cubique gauche double. Mais plus tard, en partant de la surface du 4[e] ordre de NÖTHER, dont il s'était déjà occupé (voir [112]), il parvint [116] à une transformation birationnelle du 4[e] ordre dont l'inverse est du 6[e]; enfin partant d'une surface du 6[e] ordre douée d'une courbe double du 7[e] ordre à point triple, il arriva [115] à une nouvelle transformation du type (6, 5).

Cette liste des publications de CREMONA sur la théorie des transformations géométriques ne serait pas tout-à-fait complète si l'on n'y trouvait un mot sur un mémoire [103] qui, quoique (c'est l'auteur qui le déclare) n'ayant d'autre but que de fixer l'attention des mathématiciens sur les magnifiques travaux de LIE [1]) „pleins d'idées nouvelles et fécondes“, n'est pas indigne de porter la signature de CREMONA [2]). On y trouve avant tout la représentation du complexe linéaire sur l'espace ordinaire; des formules relatives, l'auteur tire cette célèbre transformation de l'espace réglée dans l'espace de sphères qui est un des résultats les plus nouveaux dont la géométrie soit redevable au célèbre mathématicien norvégien. CREMONA avait l'intention de se servir de la représentation du complexe linéaire pour tirer, de la théorie de surfaces généralement connues, de nouveaux systèmes de rayons rectilignes. Mais ce programme de recherches

1) Voir les Forhandl. i Videnskabs-Selsk. i Christiania 1871 et le t. 5 des Mathem. Ann.

2) Cet élégant théorème, qui remonte à décembre 1871, suffirait à le prouver: (voir BELTRAMI dans le T. **10,** 1872, p. 48 du Giorn. di matem.) „Si l'on prend la forme quadratique $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 + x^2_5 = 0$ comme représentant *the absolute* de CAYLEY, les x_i étant les coëfficients de l'équation:

$$x_1 (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + 2 x_2 X + 2 x_3 Y + 2 x_4 Z + i x_5 (X^2 + Y^2 + Z^2 + 1) = 0$$

d'une sphère en coordonnées cartésiennes, la distance entre deux éléments de l'espace équivaut précisément à l'angle de deux sphères au sens ordinaire de ce mot“.

que, peu après, notre géomètre reproduisait, en le précisant (voir [104]), est demeuré malheureusement à l'état de projet; au moins le public mathématique ne connaît aucun travail qui en représente l'exécution de quelque manière. Remarquons encore, avant de finir, que le mémoire [103] fait apparaître CREMONA comme un des premiers mathématiciens qui surent mesurer la valeur des idées de LIE; plusieurs de ses cours de géométrie supérieure tenus à Rome depuis 1894 prouvent que cette estime ne diminua pas, mais, qu'au contraire, elle devint toujours plus grande, lorsque, de ses idées, les racines devinrent plus robustes, les rameaux plus larges et les fruits plus savoureux.

15. Cremona et le polytechnicum de Rome.

Les nombreux mémoires publiés par CREMONA de 1867 à 1873, sa renommée toujours grandissante de professeur éminent, les manifestations publiques de haute estime qui arrivaient jusqu'à lui[1]) de toute part et, mieux encore la respectueuse admiration qu'il inspirait à tous ceux qui l'approchaient, le qualifiaient pour un homme duquel la science et la patrie pouvaient tout espérer. On ne s'étonnera donc pas si en 1873 G. FINALI, alors ministre de l'agriculture, insista pour lui faire accepter la place de secrétaire général; mais vivant alors dans un

1) Il sera intéressant de donner ici la liste synoptique (redigée par CREMONA lui-même) des académies dont il fut membre et des degrés qu'on lui conféra:

1861. Académie des sciences de Bologne.
1865. Athénée de Venise.
" Société italienne des sciences (dite des XL).
1867. Académie des sciences de Lisbonne.
1868. Institut Lombard (Milan).
1871. Société mathématique de Londres.
1872. Société des sciences de Bohème (Prague).
" Académie des „Lincei" (Rome).
1876. Académie danoise des sciences (Copenhague).
1877. Société philosophique de Cambridge.
1878. Académie bavaroise des sciences (Munich).
1879. Société royale de Londres.
1880. Société royale des sciences de Liège.
" Société des sciences de Gottingue.
1881. Société royale de Naples.
" Académie hollandaise des sciences (Amsterdam).
1881. Société mathématique de Prague.
1883. Société royale d'Edinburgh.
1884. Doctor of laws, Edinburgh.
1886. Académie prussienne (Berlin).
1887. Institut d'encouragement de Naples.
" Académie romaine des Beaux Arts (S. Luca).
1889. Académie des sciences de Turin.
1892. Doctor of sciences, Dublin.
" Académie des sciences de Modène.
1896. Société physico-médicale d'Erlangen.
1898. Académie irlandaise (Dublin).
" Académie des sciences de Vienne.
1899. Académie de Belgique (Bruxelles).
" Institut de France.
1901. Académie suédoise (Stockholm).
1902. Académie américaine (Washington).
" Doctor sc., Christiania.
? Académie des sciences de Lucque.

milieu tout-à-fait scientifique et éloigné de toute occupation n'ayant pas trait à la science et à l'enseignement, CREMONA ne voulut pas accepter. Dans le même temps le comte ALBICINI, vice-maire de Bologne, s'adressa à lui pour obtenir son concours aux études qu'on faisait alors pour instituer dans cette ville une école des ingénieurs. Mais, pendant ces négociations, on élaborait le projet de réorganiser l'ancienne école pontificale des ingénieurs à Rome, et A. SCIALOJA, ministre de l'instruction publique, s'adressa à CREMONA pour diriger cette réorganisation et être le chef de cet institut rajeuni. En conséquence, un arrêté royal du 9 octobre 1873 nomma CREMONA directeur du nouveau polytechnicum et professeur de statique graphique, et mit aussi un terme à la période héroique de sa production scientifique. Ce déplorable résultat n'étonnera personne si on réflechit à la charge particulièrement importante que le gouvernement italien confiait à notre savant et au zèle infatigable qu'il apporta à la remplir. Pour ne pas parler des efforts qu'il dut faire pour que la nouvelle école fût détachée de l'université et installée dans l'ancien couvent de S. Pietro in Vincoli[1]), nous remarquerons, avec le plus ancien et fidèle collaborateur de CREMONA[2]), que son premier soin fut d'établir dans son école une discipline rigoureuse, et d'exciter par son exemple tout le monde à remplir exactement son devoir. Et pour que l'enseignement fût plus conforme au but spécial d'une école d'ingénieurs, tout en renforçant les études théoriques, il donna une ampleur considérable aux matières d'application, dédoublant certaines chaires et en créant de nouvelles. Enfin il donna un grand développement aux exercices pratiques jusqu'alors très négligés, et n'oublia pas de doter les cabinets scientifiques des moyens nécessaires pour effectuer des recherches originales. Le fruit de tant de soins est prouvé par le grand nombre d'ingénieurs distingués qui sortirent de l'école de Rome; si l'Italie, arrivée la dernière dans la lice des études techniques, a désormais rejoint les autres nations les plus avancées, tout le mérite en revient aux fondateurs de ses trois plus grandes écoles polytechniques: Q. SELLA, F. BRIOSCHI et L. CREMONA.

Dès son arrivée à Rome, notre géomètre fonda un cours normal analogue à celui dont il avait été *magna pars* au polytechnicum de Milan[3]). Mais, par suite de la nouvelle direction que prenait toujours plus clairement l'enseignement des mathématiques pures en Italie, ces cours normaux

---

1) Ce changement de domicile eut lieu au printemps 1874.

2) Voir le discours prononcé aux obsèques de CREMONA par M. CERADINI et publié dans le n. 24 du Bollettino della società degli ingegneri ed architetti italiani, 1903.

3) M. BERTINI suivit en 1873—1874 un beau cours sur la théorie des transformations birationnelles dans le plan et dans l'espace.

étaient fatalement destinés à être supprimés. D'ailleurs la vigoureuse organisation que CREMONA avait tout de suite donnée à l'école qu'il dirigeait, transforma bientôt le rôle du directeur, de celui d'organisateur en celui d'administrateur; comme ce rôle n'absorbait plus toute son admirable activité, CREMONA pensa qu'il pouvait bien le laisser à d'autres, et, en revenant à la science pure, remplir les vœux de ceux qui voyaient trop souvent la plume magique du grand mathématicien lombard desœuvrée. Suivant cette idée, il agréa un projet formulé par BETTI et DINI et approuvé aussi par M. BERTINI, d'après lequel il aurait dû occuper la chaire de géométrie supérieure dans l'université de Pise. Mais le ministre de l'instruction publique (M. COPPINO) ne voulut pas perdre sa collaboration savante et ferme, et (appuyé en cela par Q. SELLA) il imposa à CREMONA, comme devoir de bon patriote, de ne pas quitter la capitale du royaume. Toutefois, pour rendre possible son retour à la science pure, un arrêté royal du 10 novembre 1877 lui donna la chaire de mathématiques supérieures à l'université de Rome au lieu de celle de statique graphique qu'il occupait à l'école polytéchnique. Cette disposition du gouvernement n'a pas manqué son but; car elle permit à CREMONA d'exposer de sa chaire les nouvelles méthodes géométriques[1]) et l'entraîna à se tourner encore du côté des mathématiques, chaque fois que son esprit n'était pas occupé ailleurs: des recherches sur les courbes gauches et les surfaces du 3e ordre et sur les transformations de l'espace, dont nous avons déjà parlé, et même d'autres de nature différente [119], sont là pour le prouver.

Pour en finir avec les places occupées par CREMONA dans l'instruction publique, il faut ajouter qu'en 1888—1889 il fit à Rome le premier cours de „géométrie analytique et projective", institué d'après sa proposition. L'importance de ce cours doit se chercher dans l'idée de fondre les méthodes analytique et synthétique dans une seule; le but, plutôt didactique que scientifique, de cette innovation, était de réduire un peu l'enseignement mathématique des futurs ingénieurs. Par conséquence, CREMONA, ayant toujours en vue les théorèmes aussi bien que les démonstrations, exposait toutes les questions, que d'ordinaire on apprend en Italie dans les cours universitaires séparés de géométrie analytique et de géométrie projective, en traitant chacune par le procédé qui lui paraissait le plus simple et le plus élégant; il s'agissait donc plutôt d'un mélange que d'une vraie fusion[2]). Le cours initié par CREMONA subsiste encore à Rome et a été fondé en quelques autres universités italiennes.

1) En hiver 1879 il eut GEGENBAUER parmi ses auditeurs.

2) Je dois ces renseignements à M. F. GERBALDI, qui était en 1888—1889 assistant de CREMONA.

16. Cremona dans l'administration publique et au gouvernement.

Par arrêté royal du 16 mars 1879, CREMONA fut élu sénateur; et le sénat ne fut pas pour lui une *sine cura*, mais un champ très noble, où il put développer son intarissable activité. En 1880, le ministre DE SANCTIS le nomma commissaire du gouvernement pour mettre en ordre la bibliothèque „Vittorio Emanuele" de Rome, charge qu'il accepta à contrecoeur et qui lui procura vingt-un mois de travail acharné et ennuyeux, au bout desquels une vie tout-à-fait nouvelle commença pour cet important institut. L'année suivante, SELLA lui offrit le portefeuille de l'instruction publique, mais CREMONA ne jugea pas devoir prendre place dans un ministère succédant à celui qui avait été présidé par son ami personnel et politique B. CAIROLI [1]). Pendant la XX^e législature, il fut nommé vice-président du sénat (arrêté du 5 avril 1877), charge qu'il dut abandonner pour être ministre de l'instruction publique; mais des événements de politique générale ne le tinrent au pouvoir qu'un mois (1—29 juin 1898); voilà une chose très regrettable, car les écoles italiennes pouvaient attendre un grand benefice d'un homme de superbe intelligence, né pour gouverner, qui depuis quarante ans vivait en continuel contact avec professeurs et étudiants et qui, siégeant souvent au conseil supérieur de l'instruction publique, avait déjà exercé une action très appréciée.[2]) En 1900 CREMONA fut nommé président de la commission d'enquête sur les bâtiments publiques de Rome, et peu après (15 décembre 1900) président de celle chargée d'un rapport sur les causes de la malheureuse chûte des digues du Tibre et sur les moyens d'en empêcher le malheur de se renouveler; le savant rapport général, qu'écrivit CREMONA dans cette occasion[3]), lui coûta trois mois de travail continuel et est vraiment un modèle du genre; l'avoir rédigé, lorsque la maladie le minait, contribua certainement à aggraver l'état déjà précaire de sa santé.

Les nombreux rapports et les beaux discours que CREMONA fit au sénat sur des questions d'enseignement renferment une telle somme de science d'éducation qu'il est à regretter qu'ils soient enfouis dans un

1) M. VERONESE a publié dans sa *Commemorazione* la magnifique lettre de renoncement.

2) Le seul acte de CREMONA comme ministre qui nous est connu, est le projet de fonder un grand polytechnicum à Turin, en réunissant l'école d'application des ingénieurs au musée industriel; ce projet (qui, bien qu'approuvé par le conseil des ministres, ne put pas être présenté au Parlement) est à présent en train d'exécution. Comp. A. MOSSO, *Di un politecnico a Torino* (Nuova antologia, 1 décembre 1903).

3) Voyez le beau volume: *Atti della Commissione nominata del Ministro dei lavori pubblici per riferire sui danni ai muraglioni del Tevere e proporre i necessari provvedimenti* (Roma, tipo-litografia del genio civile 1901). 4°, 266 p. avec 7 grandes tables.

recueil que personne ne lit sans y être contraint, et je suis sûr que si un éditeur les publiait tous ensemble, tout le monde y pourrait apprendre et gagner. Le point le plus lumineux que présente son œuvre au sénat correspond à l'époque où celui-ci dut s'occuper des nouvelles lois d'instruction supérieure. G. BACCELLI, ministre de l'instruction publique, présenta le 1er mars 1884 un projet de loi intitulé „Modificazioni alle leggi vigenti per l'istruzione superiore del Regno", que la chambre des députés avait fini par approuver à une faible majorité, après une discussion qui avait duré 41 séances (20 novembre 1883—28 février 1884). Or le sénat se montra tout de suite hostile au principe d'autonomie universitaire qui formait la base de ce projet; et lorsque M. COPPINO eut succédé comme ministre à BACCELLI, le bureau du sénat traça les lignes générales d'un contre-projet, en chargeant CREMONA de lui donner la forme complète et définitive. CREMONA accepta cette tâche et la remplit avec l'énergie et la hauteur qui caractérisent tous les actes de sa vie; et le 15 mars 1885 il put présenter au sénat son contre-projet, précédé d'un long rapport où toutes les questions relatives aux universités sont traitées à fond et où la profondeur de la doctrine n'est surpassée que par la logique rigoureuse de l'ensemble[1]). M. COPPINO, qui était encore ministre, accepta les idées fondamentales du rapport de CREMONA et le sénat discuta (séances 27 novembre 1886 — 25 janvier 1887) le contre-projet de son bureau et finit par l'approuver[2]). Mais la chute du ministère (29 juillet 1887), ou peut-être cette lassitude qui envahit les assemblées non moins que les hommes lorsqu'elles se sont occupées longtemps d'un même sujet (particulièrement en Italie quand'il s'agit de lois d'instruction) empêchèrent ce beau projet de devenir loi d'état. Le long et sérieux travail fait il y a dix-huit ans par le sénat italien n'a donc pas encore donné de résultats visibles; toutefois je suis persuadé qu'il ne restera pas toujours stérile, et le rapport de CREMONA paraît à mes yeux comme une semence précieuse, qui attend du destin un terrain favorable, un air vivifiant et un soleil assez chaud pour donner les fruits auxquels la nature l'a destiné.

Ce combat entre le bureau du sénat et le gouvernement est peut-être celui qui fit le plus grand bruit, mais ce n'est pas le seul dont notre savant ait été le héros. Il faut, en effet, se souvenir que P. BOSELLI, alors ministre de l'instruction publique, présenta au sénat du royaume d'Italie (séance du 14 juin 1889) un projet de loi ayant pour but de

1) Voyez: *Senato del regno. Sessione 1882—83—84—85—86. Atti interni* Vol. III, 1886. N. 100-A.

2) Voyez: *Atti parlamentari della Camera dei senatori. Discussioni.* Legislatura XVI, Sessione 1886, p. 242 et suiv.

donner une vie nouvelle à l'enseignement pratique dans les écoles d'architecture, dont le niveau était descendu trop bas. Or le 3 février suivant, CREMONA présentait, au nom du bureau, un rapport magnifique, où étaient exposées les raisons, de fait et de principe, pour lesquelles le sénat, tout en applaudissant à l'initiative prise par le gouvernement, déclarait qu'il n'était pas favorable aux moyens indiqués pour atteindre le but désiré et en proposait d'autres meilleurs. Et le ministre, trouvant tout-à-fait sensées les raisons énumérées et les propositions faites, abandonnait son projet pour le contre-projet, qui bientôt obtint l'approbation du sénat[1]).

Pour finir, il nous faut dire quelques mots d'un dernier succès obtenu par CREMONA au sénat. Dans la séance du 15 avril 1902 le ministre de l'agriculture, d'accord avec ses collègues de l'instruction publique et des finances, présentait à cette assemblée un projet de loi, fermé par un seul article, ayant pour titre: „Scambio di alcuni servizi tra il ministero della pubblica istruzione ed il ministero di agricoltura, industria e commercio". Sous la trompeuse modestie de ce titre, se cachait une réforme extrêmement grave, car, si ce projet eut abouti, les instituts techniques auraient subi un démembrement complet. Or le bureau du sénat, mesurant sans peine toute la portée de cette réforme, jugea qu'elle n'était pas mûre et qu'elle pouvait devenir dangereuse; il décida en conséquence de s'y opposer et chargea CREMONA de rédiger le rapport dans ce sens. Notre mathématicien s'acquitta de cette charge d'une manière qu'on ne saurait assez louer[1]); et le sénat, adoptant les idées de son bureau, ajourna toute délibération sur le projet ministériel et rejeta ce projet: l'intégrité des instituts techniques fut ainsi sauvée.

Ce rapport de CREMONA porte la date 6 mai 1903; le style élevé et vigoureux avec lequel il est écrit, la sobre érudition dont il est rempli, les robustes argumentations qui en forment la squelette et même la fine ironie qui perce sous la forme compassée d'un document officiel, tout prouve la persistante vigueur intellectuelle dont jouissait notre savant, malgré ses 73 ans. Et il faut remarquer que CREMONA s'en occupa dans une époque où il était presque chaque jour attaqué par des crises angïnoïdales, causées par les progrès de l'artériosclerose. Malgré ses souffrances, le 6 juin dernier, il voulut réunir encore une fois le conseil des professeurs de l'école qu'il dirigeait; vingt-quatre heures plus tard une violente attaque d'angine de poitrine annonçait la fin de sa noble vie; il perdit bientôt l'usage de la parole, et son beau regard ne se ranima plus que par moments à l'approche de sa seconde femme (ANNA MANER MÜLLER) et de ses trois fils: le 10 juin la nouvelle Italie apprenait la perte irréparable du plus grand de ses géomètres.

1) Tous les documents relatifs à cette question se trouvent publiés dans le T. 18, 1890, p. 562-605, et 669-690 du Bollettino ufficiale dell' istruzione.

C'est ainsi que tomba le vaillant et courageux combattant, frappé en plein coeur, mais avec les armes à la main et sans avoir donné le moindre signe de faiblesse ou de lassitude. Si l'infatigable ouvrier, arrivé à la fin de sa féconde journée, en prononçant sereinement le *nunc dimittis*, a jeté un regard sur l'œuvre accomplie, il aura pu reconnaître, avec un orgueil bien légitime, que toute sa vie avait été dépensée pour la science et pour la patrie. A l'Italie il offrit le secours de son bras et le sacrifice de sa vie, en bravant la mort dans les luttes pour l'indépendance; le sort l'ayant épargné, il put rendre d'autres grands services à son pays comme professeur, comme sénateur, comme ministre, et s'acquittant avec droiture, intelligence et fermeté des charges difficiles que le gouvernement lui confiait sans cesse. Non moindres sont les obligations que la science a envers lui; ses nombreuses publications mathématiques d'une valeur extraordinaire en raison de l'étendue du champ qu'elles embrassent, de l'importance des résultats qu'elles ont fait acquérir à la science et de la merveilleuse érudition qu'on y trouve, en sont le brillant témoignage.

Sous le rapport de l'*étendue*, bornons-nous à remarquer qu'elles embrassent toutes les branches de la géométrie, depuis l'humble trigonométrie[1]), jusqu'à la superbe théorie des espaces à plusieurs dimensions (voir [98], [103], [109]), et toutes les branches de l'analyse depuis la théorie des déterminants jusqu'à celle des fonctions abéliennes; ajoutons que pour résoudre les questions qu'il rencontrait, Cremona, en s'inspirant à un éclecticisme bien entendu, faisait recours à tous les procédés qui lui semblaient utiles, depuis les méthodes classiques de l'analyse la plus rigoureuse jusqu'à celles, un peu fantaisistes et pour cela encore discutées, de la géométrie énumérative.

Sous le rapport de l'*importance*, observons que les conséquences auxquelles Cremona arriva, sont tellement définitives que l'histoire a prononcé déjà sur elles un jugement sans appel; en effet pour la théorie des cubiques gauches et des surfaces du 3e ordre, il est inscrit parmi les fondateurs; ses traités sur la théorie générale des courbes planes et des surfaces algébriques sont entre les mains d'étudiants et de professeurs de tous les pays civilisés, et sur les propositions qui forment la théorie des transformations rationnelles, il a de droits de propriété que personne n'essaiera jamais de lui contester. Les géomètres qui le suivirent, purent bien ajouter des anneaux à la chaîne d'or forgée par lui; mais personne ne put trouver la moindre imperfection dans les anneaux précédents; quel meilleur éloge pourrait-on faire dans une époque révolutionnaire et iconoclaste comme la notre?

---

1) Comp. Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 73, où est énoncée une démonstration donnée par Cremona de certaines relations („Question 681") entre les angles d'un triangle rectiligne.

Enfin l'*érudition* de première main, si riche dans toutes les productions de notre mathématicien, mérite d'être remarquée, car par elle on arrive à connaître ses procédés de recherche et à s'expliquer comment, dans la période relativement courte où il se consacra tout entier à la science, il ait pu y donner un si grand nombre de contributions si importantes. CREMONA, bien persuadé que toute la science de la vie enseigne que ce qui est nouveau, pour avoir droit à vivre et subsister, doit pousser comme une branche vigoureuse sur un tronc ancien, dans chaque occasion où il dut traiter quelque question (de géométrie ou d'enseignement ou même d'administration), commençait par étudier à fond tout ce qui avait été fait sur ce sujet; ayant pris ainsi exacte connaissance des régions déjà explorées, il partait avec courage vers la *terra incognita*; et l'expérience acquise s'alliant à son génie naturel, le portait sûrement à un but éloigné. Profonde et sage manière de travail, que devraient apprendre ceux qui, adoptant la sotte maxime „beati qui nihil legunt, omnia invenient", préfèrent gaspiller le temps à retrouver ce qui est connu, au lieu d'étudier les travaux anciens pour se mettre à mesure d'en faire de nouveaux.

Une derniere note caractéristique de la production crémonienne mérite d'être remarquée, ce fut sa *rapidité* admirable. Or, si personne ne songe à demander combien de veilles a coûté au DANTE la *Divina commedia*, ni en combien de journées furent peintes les loges de RAPHAËL, puisque les biographes de VICTOR HUGO constatent avec ébahissement qu'il écrivit *Le roi s'amuse* en vingt jours et *Hernani* en vingt-sept, il nous sera bien permis de remarquer le peu de temps qui fut nécessaire à CREMONA pour composer ces mémoires admirables, dont la perfection, extérieure et intérieure, semblerait le fruit d'un long travail.

La révolution française venait d'éclater quand tout à coup, à la veille des terribles événements qui devraient bouleverser la France, MIRABEAU manqua à l'admiration passionnée de son pays. Eh bien, l'histoire assure que dans les jours qui suivirent sa mort, quand à l'Assemblée nationale on se débattait fièvreusement pour résoudre les questions dont dépendait le salut de la France, tous les yeux se tournaient instinctivement vers la place vide du grand tribun et semblèrent demander à Dieu un miracle pour entendre encore la voix inspirée du puissant orateur.

Or, après la mort de CREMONA, le même sentiment de vide insupportable nous envahit à notre tour, nous qui nous adonnons à l'étude de la géométrie, nous qui, du plus éminent au plus modeste, chérissons l'idée d'être fils ou petit-fils du grand mathématicien, dont un conseil amical ou un encouragement bienveillant ne nous faisait défaut en aucune occasion. Moins malheureux pourtant que les contemporains de MIRABEAU, nous pouvons encore évoquer la voix du maître illustre et vénéré; car ses œuvres immortelles sont là, guide vaillant et sûr, source d'enseignement et d'inspiration qui ne tarira jamais.

Gênes, 31 janvier 1904.

Liste chronologique des publications mathématiques de L. Cremona[1]).

1855.

1. *Sulle tangenti sfero-conjugate.* [Pavia, 3 Settembre 1855.] Annali di sc. matem. **6**, p. 382—392.

1856.

2. *Intorno ad un teorema di* Abel. [Pavia, 2 Maggio 1856.] Annali di sc. matem. **7**, p. 99—105.

1857.

3. *Nota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria.* [Cremona, 6 Agosto 1857.] Programma dell' I. R. ginnasio liceale di Cremona, alla fine dell' anno scolastico 1857, p. 1—14.

4. *Sur les questions 321 et 322 (voir t. XV, p. 154).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 41—43.

5. *Solution analytique de la question 344 (Mannheim) (voir t. XV, p. 383).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 79—82.

6. *Seconde solution de la question 368 (Cayley) (voir p. 192).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 250.

7. *Seconde solution de la question 369 (voir p. 192).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 251—252.

1858.

8. *Rivista bibliografica. Beiträge zur Geometrie der Lage, von Dr. K. G. C. von Staudt.* Nürnberg 1856—1857. [1 Marzo 1858.] Annali di matem. **1**, p. 125—128.

9. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. Nota.* [Cremona, Aprile e Giugno 1858.] Annali di matem. **1**, p. 164—174, 278—295.

1859.

10. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. Teoremi.* [Cremona, Ottobre 1858.] Annali di matem. **2**, p. 19—29.

11. *Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. Nota.* [Cremona, 14 Dicembre 1858.] Annali di matem. **2**, p. 65—81.

12. *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe). Nota.* [Cremona, 22 Febbrajo 1859.] Annali di matem. **2**, p. 201—207 [voir un Erratum id. T. **3**, p. 384].

---

1) Les dates entre [ ] sont ou celles indiquées par l'auteur lui-même ou celles des séances académiques où eut lieu la lecture des différents travaux. On a omis de noter les rapports académiques et similaires.

13. *Solution de la question 435 (voir T. XVIII, p. 186).* Nouv. ann. de mathém. **18**, p. 199—204.

1860.

14. *Solution de la question 464 (voir T. XVIII, p. 117).* Nouv. ann. de mathém. **19**, p. 149—151.

15. *Solution de la question 465 (voir T. XVIII, p. 117).* Nouv. ann. de mathém. **19**, p. 151—153.

16. *Sur les coniques sphériques et nouvelle solution générale de la question 498.* Nouv. ann. de mathém. **19**, p. 269—279.

17. *Solutions des questions 494 et 499; méthode de Grassmann et propriété de la cubique gauche.* Nouv. ann. de mathém. **19**, p. 356—361.

18. *Sopra un problema generale di geometria.* [Milano, 1 Giugno 1860.] Annali di matem. **3**, p. 161—171.

19. *Rivista bibliografica: Sulle superficie di second' ordine omofocali.* Annali di matem. **3**, p. 241—244.

20. *Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine congiunte.* [Bologna, 12 Dicembre 1860.] Annali di matem. **3**, p. 257—282.

21. *Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti conjugate.* [Bologna, 3 Gennajo 1861.] Annali di matem. **3**, p 325—335.

22. *Considerazioni di storia delle geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze.* [Cremona, 28 Marzo 1859. Addition: 9 Maggio 1860.] Il politecnico **9**, p. 286—323.

23. *Intorno ad un' operetta di Giovanni Ceva, matematico milanese del secolo XVII.*[1])

1861.

24. *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.* [Milan, 27 mars 1860.] Journ. für Mathem. **58**, p. 138—150.

25. *Prolusione al corso di geometria superiore letta nell' università di Bologna nel novembre 1860.* Il politecnico **10**, p. 22—42.

26. (L. c.) *Trattato di prospettiva rilievo. Traité de perspective relief par M. Poudra. Paris 1860.* Il politecnico **11**, p. 103—108.

27. *Sulle superficie gobbe del terzo ordine.* [Bologna, 1 Febbrajo 1861. Addition: 9 Marzo 1861.] Atti dell' ist. Lomb. [Milano] **2**, p. 291—302.

28. *Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Memoria* [letta ai 7 di Marzo 1861 davanti all' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna]. Annali di matem. **4**, p. 71—101. Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1860—1861, p. 58—63.

29. *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* [Sessione 19 Dicembre 1861.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna **12**, p. 305—436.

30. *Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.* [Séance du 24 juin 1861.] Comptes rendus Paris **52**, p. 1319—1323. Annali di matem. **4**, p. 22—25.

---

1) C'est le seul des ouvrages de Cremona que je ne connais pas, quoique je l'aie cherché partout. Dans une liste rédigée par Cremona lui-même, on lit qu'il est extrait d'une Rivista giur[idica?] ou ginn[asiale?] publié en 1858; mais dans aucune bibliothèque je n'ai trouvé une telle revue.

31. *Rivista bibliografica: O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes,* Leipzig 1861. [Bologna, 10 Febbrajo 1862.] Annali di matem. **4,** p. 109—111.

32. *Solution de la question 545 (voir t. XIX, p. 402).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 95—96.

33. *Sur la question 317 (voir t. XV, p. 52).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 342—343.

34. *Sur un problème d'homographie (Question 296) (voir t. XVIII, p. 50).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 452—456.

1862.

35. *Intorno alle trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell' altra una sola retta.* [Sessione 27 Marzo 1862.] Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1861—62, p. 88—91.

36. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 2_2, p. 621—631. Giorn. di matem. **1,** 1863, p. 305—311.

37. *Sur les surfaces développables du cinquième ordre.* [Séance du 17 mars 1862.] Comptes rendus Paris **54,** p. 604—608.

38. *Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches.* [Bologne, 21 avril 1861; addition 27 octobre 1862.] Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{1}_2$, p. 287—304, 366—378, 436—446.

39. *Note sur les cubiques gauches.* [Bologne, 24 juin 1861.] Journ. für Mathem. **60,** p. 188—192.

40. *Sur les surfaces gauches du 3e degré.* [Bologne, 1 septembre 1861.] Journ. für Mathem. **60,** p. 313—320.

1863.

41. *Un teorema sulle cubiche gobbe.* [Cornigliano, 19 Settembre 1863.] Giorn. di matem. **1,** p. 278—280.

42. *Questioni proposte 16—18.* Giorn. di matem. **1,** p. 280.

43. *Corrispondenza.* [Lettre à N. Trudi, datée: Cornigliano, 16 Settembre 1863.] Giorn. di matem. **1,** p. 317—318.

44. *Questioni 19—22 (L. Romance). Questioni 23—25.* Giorn. di matem. **1,** p. 318—319.

45. *Area di un segmento di sezione conica.* Giorn. di matem. **1,** p. 360—364.

46. *Sulla projezione iperboloidica di una cubica gobba. Nota.* [Bologne, 26 octobre 1862.] Annali di matem. **5,** p. 227—231. Giorn. di matem. **2,** 1864, p. 122—126.

47. *Sulla teoria delle coniche. Nota.* [Cornigliano (presso Genova), 4 Agosto 1863.] Annali di matem. **5,** p. 330—331. Giorn. di matem. **1,** p. 225—226.

48. *Rivista bibliografica: Œuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra.* Annali di matem. **5,** p. 332—336. Giorn. di matem. **2,** 1864, p. 115—121.

1864.

49. *Sulla teoria delle coniche. Nota.* [Bologna, 21 Febbrajo 1864.] Giorn. di matem. **2,** 17—20, 192.

50. *Rivista bibliografica: Sulla teoria delle coniche.* [Bologna, Novembre 1864.] Annali di matem. **6,** p. 179—190. Giorn. di matem. **3,** 1865, p. 60—64, 113—120.

51. *Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine, colle soluzioni delle questioni 26 e 27 (T. 2° di questo giornale, p. 29).* [Bologna, 24 Maggio 1864.] Giorn. di matem. **2,** p. 78—85.

52. *Questione 28.* Giorn. di matem. **2**, p. 30.

53 *Questioni 30—32.* Giorn. di matem. **2**, p. 62.

54. *Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1863—64, p. 25—28. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna $\mathbf{3}_2$, p. 385—358; Giorn. di matem. **2**, p. 202—210.

55. *Sur le nombre des conique qui satisfont à des conditions doubles.* [Séance 7 novembre 1864.] Comptes rendus Paris **59**, p. 776—779.

56. *Sopra alcune questioni nelle teoria delle curve piane.* Annali di matem. **6**, p. 153—168.

57. *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée.* [Bologne, octobre 1863.] Journ. für Mathem. **63**, p. 141—144.

58. *Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents.* [Bologne, 12 février 1864.] Journ. für Mathem. **63**, p. 315—328.

59. *Questions 563, 564 et 565 (FAURE) (voir t. XX, p. 56).* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, p. 21—25.

60. *Question 491 (voir t. XVIII, p. 443).* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, p. 25—30.

61. *Questions 677, 678 et 679 (SCHRÖTER) (voir 2e série, T. II. p. 522).* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, p. 31—33.

62. *Question 380.* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, p. 127—129.

63. *Quistioni 33—34.* Giorn. di matem. **2**, p. 91 et **3**, p. 81.

64. *On the geometrical transformations of plane curves.* Report of the meeting held at Bath in sept. 1864 by the Brit. ass. for advancement of science, p. 3—4.

1865.

65. *Quistione 44.* Giorn. di matem. **3**, p. 64—81.

66. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota II.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1864—65, p. 18—21. Mem. dell' acc. d. sc. Bologna, $\mathbf{5}_2$, p. 3—35. Giorn. di matem. **3**, p. 269—280, 363—376.

67. *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* [Bologne, 10 mai 1864.] Journ. für Mathem. **64**, p. 101—123.

68. *Démonstration géométrique de deux théorèmes relatifs à la surface d'égale pente circonscrite à une conique.* [Bologne, 19 mai 1865.] Nouv. ann. de mathém. **4**, p. 271—275.

69. *(MARCO UGLIENI) I principii della prospettiva lineare secondo TAYLOR* [Ducentola, Settembre 1865.] Giorn. di matem. **3**, p. 338—343.

1866.

70. *On the fourteen-points conic.* Messenger of mathem. **3**, p. 13—14.

71. *On normals to conics; a new treatement of the subject.* Messenger of mathem. **3**, p. 88—91.

1867.

72. *Rappresentazione della superficie di STEINER e delle superficie gobbe di 3° grado sopra un piano.* [Séance 24 janvier 1867.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] **4**, p. 15—23.

73. *Un teorema intorno alle forme quadratiche non omogenee fra due variabili.* [Séance 27 juin 1867]. Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] **4**, p. 199—201.

74. *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna. 1865—66, p. 76—77; 1866—67, p. 72—73. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna **6**, p. 91—136; **7**, p. 29—78.

75. *Extrait d'une lettre à M. Chasles.* [Séance 27 Mai 1867.] Comptes rendus Paris **64**, p. 1079—1080.

1868.

76. *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Journ. für Mathem. **68**, p. 1—133.

77. *Sopra una certa famiglia di superficie gobbe.* [Séance 6 fevrier 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 1_2, p. 109—112.

78. *Sopra una certa curva gobba di quart' ordine.* [Séance 19 mars 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 1_2, p. 199—202.

79. *Sull' opera del Prof. Casorati „Teorica delle funzioni di variabili complesse" (vol. I). Relazione.* [Séance 7 mai 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 1_2, p. 420—424.

80. *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, e determinazione delle loro curve asintotiche.* Annali di matem. 1_2, p. 248—259.

1869.

81. *Sulle superficie gobbe di quarto grado.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1868—69, p. 96—97. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 8_2, p. 235—250.

82. *Sulle trasformazione delle curve iperellitiche.* [Séance 29 avril 1869] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 2_2, p. 566—571.

83. (Avec F. Casorati.) *Intorno al numero de' moduli delle equazioni e delle curve algebriche di dato genere. Osservazioni.* [Séance 13 Mai 1869.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 2_2, p. 620—625.

84. (Avec F. Brioschi.) *Al sig. direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane.* [Milano, 24 Febbrajo 1869.] Giorn. di matem. **7**, p. 51—54.

1870.

85. *Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine.* [Séance 24 mars 1870.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 3_2, p. 209—219.

86. *Sugl' integrali a differenziale algebrico.* [Séance 8 avril 1869.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna, 10_2, p. 3—33.

87. *Lettera in lode del Piani.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 1_3, p. 40—41.

88. *Sulle linee di curvatura delle superficie di 2° grado. Memoria letta nella sessione 12 Maggio 1870.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1870—71, p. 86—88. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 1_3, p. 49—67.

89. *Sulla trasformazione razionale di 3° grado nello spazio, la cui inversa è di 4° grado.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 1_3, p. 365—386.

90. *Observations géométriques à propos de la note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4e ordre avec un point double".* [Milan, avril 1871.] Mathem. Ann. **4**, p. 99—102.

91. *Über Abbildung algebraischer Flächen.* Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. in Göttingen 1871, p. 129—148. Mathem. Ann. **4**, p. 213—230.

92. *Sulla superficie di quart' ordine, dotata di una conica doppia. Nota.* [Séance 9 mars 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 140—144.

93. *Sulla superficie di quart' ordine dotata di una conica doppia. Seconda nota.* [Séance 23 mars 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 159—169.

94. *Sulle trasformazioni razionali della spazio. Nota I.* [Séance 4 mai 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 269—279.

95. *Sulle trasformazioni razionali dello spazio. Nota II.* [Séance 1 juin 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 315—324.

1872.

96. *Commemorazione di* CLEBSCH. Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 5_2, p. 1041—1042.

97. *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali.* [Séance 18 avril 1872.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna, 2_3, p. 117—128.

98. *Sulle trasformazioni razionali dello spazio.* Annali di matem. 5_2, p. 131—163.

99. *Le figure reciproche nella statica grafica.* Milan (3e éd., Milan, Hoepli 1879).

100. *Corrispondenza.* [Milan, janvier 1872]. Giorn. di matem. **10**, p. 47—48.

1873.

101. *Elementi di geometria projettiva.* Vol. I. Torino.

1874.

102. *Elementi di calcolo grafico.* Torino.

1876.

103. *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie.* [Séance 6 juin 1875.] Mem. dell' acc. dei Lincei [Roma] 3_2, p. 285—307.

104. *Sur les systèmes de sphères et les systèmes de droites.* Rep. of the Brit. ass. 1876 (Glasgow), p. 12—13.

1877.

105. *Osservazioni sull' hexagrammum mysticum.* Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 1_3, p. 142—143.

106. *Teoremi stereometrici dei quali si deducono le proprietà dell' esagramma di* PASCAL. [Séance 8 avril 1877.] Mem. dell' acc. dei Lincei [Roma] 1_3, p. 854—874.

1878.

107. *Über die Polarhexaeder bei den Flächen dritter Ordnung.* [Am 19. Sept. 1877 der Naturforscherversammlung in München vorgelegt.] Mathem. Ann. **13**, p. 301—303.

108. (Avec E. BELTRAMI.) *DOMENICO CHELINI.* Giorn. di matem. **16**, p. 345.

1879.

109. *Sulle superficie e le curve cha passano pei vertici d' infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba.* [Séance 17 avril 1873.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 12_2, p. 347—352.

110. *Commemoraziore di* DOMENICO CHELINI (Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 3_3, p. 53—57. Bullet. d. sc. mathém. 3_2, p. 228—238.

1881.

111. *Elenco delle pubblicazioni scientifiche di* DOMENICO CHELINI. Collectanea mathematica (Milano), p. XXIX—XXXII.

112. *Sopra una certa superficie di quart' ordine* [Roma, Giugno 1881]. Collectanea mathematica (Milano), p. 413—424.

1883.

113. *Commemorazione del prof. H. J. S.* SMITH. Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 7_3, p. 162—163.

114. *Commemorazione di W.* SPOTTISWOODE. Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 7_3, p. 308—309.

1884.

115. *Sopra una trasformazione birazionale del* 6° *grado dello spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del* 5° *grado.* [Lue 28 avril 1884.] Proc. of the London mathem. society **15**, p. 242—246.

116. *On a geometrical transformation of the* 4^{th} *order, in space of three dimensions, the inverse beeing of the* 6^{th} *order.* [Lue 8 mai 1884.] Trans. of the Irish ac. [Dublin] **28**, p. 279—284.

1885.

117. *Esempio del metodo di dedurre una superficie da una figura piana.* [Séance 21 avril 1884.] Proc. of the royal soc. of Edinburgh **12**, p. 599—601.

118. *An example of the method of deducing a surface from a plane figure.* [Séance 21 avril 1884.] Trans. of the royal soc. of Edinburgh **32**:**2**, p. 411—413.

1895.

119. *Question 470.* L'intermédiaire des mathématiciens **2**, p. 20.

1900.

120. *Commemorazione del senatore prof.* EUGENIO BELTRAMI. Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Adunanza solenne 1900, p. 462–472. Rend. del circ. matem. di Palermo **14**, p. 275—289; Giorn. di matem. **38**, p. 355—375; Opere matematiche di EUGENIO BELTRAMI, T. I. p. IX—XXII.
