5.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 344 (MANNHEIM). [7]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XVI (1857), pp. 79-82.

Soient x_1, y_1, et x_2, y_2, les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme

$$x_3 = x_1 + \lambda h \;, \quad y_3 = y_1 + \lambda k \;,$$
$$x_4 = x_1 + \mu m \;, \quad y_4 = y_1 + \mu n \;,$$

h, k, l, m sont des quantités données, λ, μ deux indéterminées; donc

$$2\,\mathrm{ABO} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2\,\mathrm{AOC} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}} + \frac{1}{\mathrm{AOC}}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix}}{\lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

mais les points B, C, O étant en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix} - \lambda\mu \begin{vmatrix} k & h \\ n & m \end{vmatrix} = 0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}} + \frac{1}{\mathrm{AOC}}\right) = \frac{\begin{vmatrix} k & h \\ n & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}}$$

quantité indépendante de λ, μ. Donc, etc.

Théorème analogue dans l'espace.

Par un point O situé dans l'intérieur d'un angle trièdre de sommet A, on mène un plan qui coupe lès arêtes du trièdre dans les points B, C, D. Soient ν_1, ν_2, ν_3 le valeurs des trois pyramides AOCD, AODB, AOBC; je dis que la somme

$$\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2 \nu_3}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3 \nu_1}} + \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1 \nu_2}}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan sécant.

Soient x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots, x_5, y_5, z_5$ les coordonnés des cinq ponts A, O, B, C, D; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, sont des quantités données ainsi que les α, β, γ; on aura

$$\frac{x_3 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_3 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_3 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_4 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_2} = \mu,$$

$$\frac{x_5 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_3} = \nu,$$

donc

$$6\,\nu_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu A,$$

et par analogie

$$6\,\nu_2 = \nu\lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \nu\lambda B,$$

$$6\,\nu_3 = \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu C,$$

A, B, C sont des quantités connues; d'où

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{\sqrt{\nu_1 \nu_2 \nu_3}} = \frac{\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C}{\lambda\mu\nu \sqrt{ABC}}.$$

Mais les points O, A, B, C étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

remplaçant x_3 par $\lambda\alpha_1 + x_1$, y_3 par $\lambda\beta_1 + y_1$, z_3 par $\lambda\gamma_1 + z_1$, etc., on obtient

$$\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu D,$$

donc

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2 \nu_3}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3 \nu_1}} + \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1 \nu_2}} \right) = \frac{D}{\sqrt{ABC}},$$

quantité indépendante de λ, μ, ν.

C'est ce qu'il fallait prouver.