12.

INTORNO ALLE CONICHE INSCRITTE IN UNA STESSA SUPERFICIE SVILUPPABILE DEL QUART' ORDINE (E TERZA CLASSE).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo II (1859), pp. 201-207.

È noto che i piani osculatori di una *cubica gobba* (linea a doppia curvatura di terz' ordine) inviluppano una superficie sviluppabile del quart' ordine (e per conseguenza della terza classe) e ciascun piano osculatore taglia la sviluppabile secondo una conica. Io ho dimostrato in una memoria inserita in questi *Annali* (1858) che il luogo dei centri di tutte le coniche analoghe è un' altra conica piana. Ora ho ricercato la natura di tutte quelle coniche inscritte in una stessa sviluppabile del quart'ordine, e indagando come ne fossero distribuiti i centri sulla *conica locale*, sono arrivato ad alcuni teoremi, che hanno una singolare affinità con quelli dati recentemente dal TRUDI *) e dallo STEINER **) sulle coniche circoscritte ad uno stesso tetragono.

Assumo come origine di tre coordinate rettilinee obbliquangole un punto arbitrario della cubica gobba; l' asse delle z sia tangente alla curva, e il piano yz sia osculatore; l' asse delle x sia parallelo ad un assintoto della cubica, ossia diretto ad uno de' punti della medesima, che sono a distanza infinita: de' quali ve n' ha sempre almeno uno reale. Da ultimo il piano xy passi per l' assintoto dianzi nominato. Ciò posto, la cubica potrà essere rappresentata, in tutta la generalità, dal sistema di equazioni:

$$\frac{x}{a}=\frac{\theta^3}{\varphi}, \quad \frac{y}{b}=\frac{\theta^2}{\varphi}, \quad \frac{z}{c}=\frac{\theta}{\varphi} \tag{1}$$

*) Memorie dell'Accademia di Napoli, 1857.

**) Monatsberichte der berliner Akademie, Iuli 1858.

ove è posto per brevità:

$$\varphi = (\theta - \alpha)^2 \pm \beta^2$$

a, b, c, α, β sono costanti determinate; θ è un parametro variabile da un punto all'altro della linea. Nel valore di φ il doppio segno dell'ultimo termine serve a distinguere i due casi che la cubica abbia uno solo o tre assintoti reali. L'origine è quel punto della linea che corrisponde a $\theta = 0$; per $\theta = \infty$ si ha quel punto della medesima che è a distanza infinita sull'asse delle x. Posto:

$$h = \alpha^2 \pm \beta^2$$

il piano che sega la cubica ne' tre punti di parametri θ_1, θ_2, θ_3 sarà rappresentato dall'equazione:

$$h\frac{x}{a} + \left(\theta_1\theta_2\theta_3 - h(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\right)\frac{y}{b}$$
$$+ \left(h(\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_2) - 2\alpha\theta_1\theta_2\theta_3\right)\frac{z}{c} - \theta_1\theta_2\theta_3 = 0\,;$$

quindi l'equazione del piano osculatore nel punto di parametro θ è:

$$(2) \qquad h\frac{x}{a} + \theta(\theta^2 - 3h)\frac{y}{b} + \theta^2(3h - 2\alpha\theta)\frac{z}{c} - \theta^3 = 0$$

e quelle della retta che unisce due punti θ_1, θ_2 sono:

$$\frac{x}{a} - (\theta_1 + \theta_2)\frac{y}{b} + \theta_1\theta_2\frac{z}{c} = 0\,,$$

$$(\theta_1\theta_2 - h)\frac{y}{b} + \left(h(\theta_1 + \theta_2) - 2\alpha\theta_1\theta_2\right)\frac{z}{c} - \theta_1\theta_2 = 0\,.$$

Il piano osculatore al punto θ è tagliato dal piano osculatore al punto ω in una retta, la cui proiezione sul piano yz ha per equazione:

$$\omega^2\left(\frac{y}{b} - 2\alpha\frac{z}{c} - 1\right) + \omega\left(\theta\left(\frac{y}{b} - 1\right) + (3h - 2\alpha\theta)\frac{z}{c}\right)$$
$$+ (\theta^2 - 3h)\frac{y}{b} + \theta(3h - 2\alpha\theta)\frac{z}{c} - \theta^2 = 0\,.$$

Da questa equazione e dalla sua derivata presa rispetto ad ω eliminando questa quantità, si ha la:

$$(3)\qquad (4h-\theta^2)\frac{y^2}{b^2}+(3h-2\alpha\theta)(h+2\alpha\theta)\frac{z^2}{c^2}$$

$$+2(2\alpha\theta^2-\theta h-4\alpha h)\frac{y}{b}\frac{z}{c}+2(\theta^2-2h)\frac{y}{b}+2\theta(h-2\alpha\theta)\frac{z}{c}-\theta^2=0.$$

Questa equazione insieme colla (2) rappresenta quindi la conica secondo la quale il piano osculatore al punto θ sega la superficie sviluppabile, luogo delle rette tangenti alla cubica gobba. La conica (2) (3) è iperbole od ellisse secondo che la quantità:

$$\Delta=(\theta-\alpha)^2\mp 3\beta^2$$

è positiva o negativa. Dunque:

Quando lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile del quart'ordine *) *ha tre assintoti reali, tutte le coniche inscritte nella medesima (e poste ne' suoi piani tangenti) sono iperboli.*

Le coordinate del centro della conica (2) (3) sono date dalle:

$$(4)\qquad 2\Delta\frac{x}{a}=3\theta(2\alpha\theta-3h),\quad 2\Delta\frac{y}{b}=2\theta(\theta-\alpha)-3h,\quad 2\Delta\frac{z}{c}=\theta-4\alpha$$

da cui eliminando θ si hanno le equazioni della *conica locale de' centri:*

$$(5)\qquad h\frac{x}{a}+2\alpha(3h-4\alpha^2)\frac{y}{b}+(3h-4\alpha^2)^2\frac{z}{c}+\alpha(8\alpha^2-9h)=0,$$

$$(6)\qquad 2\left((8\alpha^2-3h)\frac{z}{c}+4\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\right)^2$$

$$+\left(1+2\alpha\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\left(2(4\alpha^2+3h)\frac{y}{b}-16\alpha^3\frac{z}{c}-(8\alpha^2+3h)\right)=0.$$

Questa conica è iperbole od ellisse secondo che la quantità:

$$h-\alpha^2=\pm\beta^2$$

è positiva o negativa; dunque:

Il luogo de' centri delle coniche inscritte in una superficie sviluppabile del quart'ordine è un'iperbole o un'ellisse secondo che lo spigolo di regresso ha un solo o tre assintoti reali.

---

*) Ogni superficie sviluppabile di quart'ordine ha per ispigolo di regresso una cubica gobba: teorema del sig. CHASLES *(Aperçu historique.* Nota 33.ª).

Nel caso che la cubica gobba abbia un solo assintoto reale, la conica (2) (3) è iperbole o ellisse secondo che è positiva o negativa la quantità Δ. Formando (in ciò seguo il metodo del TRUDI) questa quantità colle coordinate y, z del centro della conica medesima, si ha:

$$\Delta = \frac{\frac{3}{2}h}{\frac{y}{b} - 2\alpha\frac{z}{c} - 1}$$

quindi la specie della conica dipende dal segno del trinomio, che è nel denominatore; ora basta osservare la (6) per accorgersi che l'equazione:

$$\frac{y}{b} - 2\alpha\frac{z}{c} - 1 = 0$$

insieme colla (5) rappresenta una tangente dell'*iperbole locale de' centri.* Dunque quel trinomio sarà positivo o negativo secondo che il punto di coordinate x, y, z centro della conica (2) (3) cade da una banda o dall'altra di questa tangente, cioè, secondo che cade nell'uno o nell'altro ramo dell'*iperbole locale.* Dunque:

Quando lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile di quart'ordine ha un solo assintoto reale, in questa sono inscritte infinite ellissi, infinite iperboli e due parabole; e i centri di queste coniche sono distribuiti nell'iperbole locale in modo che un ramo di questa contiene i centri delle ellissi, e l'altro ramo i centri delle iperboli.

Un piano qualunque contiene, com'è noto, una retta intersezione di due piani osculatori: i quali, per un teorema che io ho dimostrato in un'altra memoria*), sono reali o ideali secondo che quel piano sega la cubica in un solo punto reale o in tre. Dunque una cubica gobba ha due piani osculatori paralleli soltanto nel caso che vi sia un solo assintoto reale. È evidente che le coniche secondo cui questi due piani segano la sviluppabile sono parabole. Nella nostra notazione le due parabole corrispondono a $\Delta = 0$, cioè a $\theta = \alpha \pm \beta\sqrt{3}$; quindi per esse l'equazione (3) diviene:

$$\left(\frac{y}{b}(\beta \mp \alpha\sqrt{3}) + \frac{z}{c}(\alpha \mp \beta\sqrt{3})(\beta \pm \alpha\sqrt{3})\right)^2$$

$$+ 2(\beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{3})\frac{y}{b} + 2(\alpha \pm \beta\sqrt{3})(\beta^2 - \alpha^2 \mp 2\alpha\beta\sqrt{3})\frac{z}{c} - (\alpha \pm \beta\sqrt{3})^2 = 0 \qquad [19]$$

quindi i diametri delle due parabole sono paralleli agli assintoti dell'iperbole locale

*) Annali, gennaio-febbraio 1859.

(5) (6). I piani delle parabole sono rappresentati dalle:

$$h\frac{x}{a}+2\alpha(3h-4\alpha^2)\frac{y}{b}+(3h-4\alpha^2)^2\frac{z}{c}=(\alpha\pm\beta\sqrt{3})^3$$

epperò sono paralleli al piano (5) dell'iperbole locale: proprietà che ho già fatto notare altrove*). Inoltre è facile vedere che il piano (5) è equidistante dai due piani delle parabole: dunque:

Quando lo spigolo di regresso d'una superficie sviluppabile del quart'ordine ha tre assintoti reali, essa non ha piani tangenti paralleli, epperò nessuna parabola è inscritta nella medesima. Ma se v'ha un solo assintoto reale, v'hanno pure due piani tangenti paralleli, i quali tagliano la superficie secondo due parabole. Il piano dell'iperbole locale è parallelo a questi due piani tangenti paralleli e da essi equidistante; ed inoltre i diametri delle parabole sono paralleli agli assintoti della locale.

Se nel primo membro della (5) si pongono per x, y, z i valori (1) si ha il risultato:

$$(\theta-\alpha)\Big((\theta-\alpha)^2\pm 9\beta^2\Big)$$

dunque il piano della locale incontra sempre la cubica nel punto reale che corrisponde a $\theta=\alpha$; in nessun altro punto se la cubica ha un solo assintoto reale; nel caso di tre assintoti reali ancora in altri due punti reali:

$$\theta=\alpha+3\beta, \quad \theta=\alpha-3\beta.$$

Ciò risulta anche da un teorema ricordato di sopra. Osservato poi che si ha:

$$\Delta=(\theta-\alpha-\beta\sqrt{3})(\theta-\alpha+\beta\sqrt{3})$$

si conchiude facilmente che, siccome in ogni piano osculatore della cubica esiste una conica inscritta nella sviluppabile, così:

Se la cubica gobba ha un solo assintoto reale, corrispondono ellissi a tutti i punti di essa compresi fra i due piani osculatori paralleli; iperboli a tutt' i punti rimanenti.

Altrove ho denominato *fuoco***) di un piano il punto, sempre reale, ove concorrono i piani osculatori della cubica nelle intersezioni di essa col piano. Ora è facile vedere che il *fuoco* del piano (5) e il centro della conica locale (5) (6) coincidono in uno stesso

*) Annali, gennaio-febbraio 1859.

**) Per questa denominazione ho seguìto l'esempio dell'illustre Chasles: veggansi i *Comptes rendus* del 1843. In questa teoria de' *fuochi* sembra importante da considerarsi la retta che contiene i *fuochi* de' piani paralleli a quello della *conica locale*.

punto, le cui coordinate sono:

$$\frac{x}{a}=\frac{\alpha(9h-8\alpha^2)}{4(h-\alpha^2)}, \quad \frac{y}{b}=\frac{3h-2\alpha^2}{4(h-\alpha^2)}, \quad \frac{z}{c}=\frac{\alpha}{4(h-\alpha^2)}$$

cioè:

I piani osculatori della cubica gobba ne' punti ov' essa è incontrata dal piano della conica locale passano pel centro di questa conica.

Le formole relative alla cubica gobba divengono più semplici, senza punto scemare di generalità, se si pone $\alpha=0$, cioè se si assume come origine delle coordinate il punto reale (o uno de' tre punti reali) in cui la cubica è segata dal piano (5). Allora la curva è rappresentata dalle:

$$\frac{x}{a}=\frac{\theta^3}{\theta^2+h}, \quad \frac{y}{b}=\frac{\theta^2}{\theta^2+h}, \quad \frac{z}{c}=\frac{\theta}{\theta^2+h}$$

ove $h=\pm\beta^2$. L' equazione (5) diviene:

$$(5)' \qquad \frac{x}{a}+9h\frac{z}{c}=0.$$

Mediante queste formole sì semplici si dimostra facilmente la proprietà che segue. Il cono di second' ordine che passa per la cubica gobba ed ha il vertice al punto di parametro θ è rappresentato dalla:

$$\left(\frac{x}{a}-\theta\frac{y}{b}\right)\left(\theta\frac{y}{b}+h\frac{z}{c}-\theta\right)-h\left(\frac{y}{b}-\theta\frac{z}{c}\right)^2=0$$

esso è segato dal piano (5)' in una conica la cui proiezione sul piano yz è rappresentata dalla:

$$(\theta^2+h)\frac{y^2}{b^2}+h(9h+\theta^2)\frac{z^2}{c^2}+8h\theta\frac{yz}{bc}-9\theta h\frac{z}{c}-\theta^2\frac{y}{b}=0.$$

Qualunque sia θ, questa equazione rappresenta una ellisse od un' iperbole secondo che h è positiva o negativa; dunque:

Il piano della conica luogo de' centri delle coniche inscritte in una superficie sviluppabile del quart' ordine sega i coni di second' ordine passanti per lo spigolo di regresso di questa secondo coniche che sono tutte di una medesima specie; e propriamente sono ellissi, iperboli o parabole secondo che la locale è iperbole, ellisse o parabola.

Per conseguenza:

Se una cubica gobba ha tre assintoti reali, per essa passano tre cilindri (di se-

cond'ordine) iperbolici; se ha un solo assintoto reale, per essa passa un solo cilindro (di second'ordine) ellittico.

Dalle proposizioni suesposte credo che emerga l'importanza di dividere le cubiche gobbe in due generi:

Primo genere: la curva ha tre assintoti reali; non vi sono piani osculatori paralleli, i piani osculatori segano la superficie sviluppabile da essi inviluppata secondo coniche che sono tutte iperboli; i centri delle quali sono tutti in un'ellisse. Il piano di quest'ellisse sega la cubica in tre punti reali, e i coni di second'ordine passanti per quest'ultima in altrettante coniche che sono tutte iperboli.

Secondo genere: la cubica gobba ha un solo assintoto reale, ed ha due piani osculatori paralleli, i quali segano la superficie sviluppabile (della quale la cubica è lo spigolo di regresso) secondo parabole, mentre gli altri piani osculatori la segano secondo ellissi o iperboli. I centri di queste coniche sono in un'iperbole posta in un piano parallelo ai due piani osculatori paralleli e da essi equidistante. In un ramo dell'iperbole locale sono i centri delle ellissi, nell'altro ramo i centri delle iperboli. Il piano dell'iperbole locale sega la cubica in un solo punto reale, e i coni di second'ordine passanti per quest'ultima in altrettante coniche che sono tutte ellissi.

Vi sono poi due casi particolari, interessanti a considerarsi e sono:

1.° La cubica gobba può avere un solo assintoto reale a distanza finita, e gli altri due coincidenti a distanza infinita. Il che torna a dire che il piano all'infinito seghi la cubica gobba in un punto e la tocchi in un altro. In questo caso la linea può essere rappresentata colle equazioni:

$$\frac{x}{a}=\frac{\theta^3}{(\theta-\alpha)^2},\quad \frac{y}{b}=\frac{\theta^2}{(\theta-\alpha)^2},\quad \frac{z}{c}=\frac{\theta}{(\theta-\alpha)^2}$$

colle quali si dimostrano facilmente le seguenti proprietà, le quali ponno però essere dedotte anche dai teoremi generali dimostrati sopra:

Le coniche inscritte in una superficie sviluppabile di quart'ordine, che abbia una generatrice a distanza infinita, sono tutte iperboli, ad eccezione di una sola che è una parabola, e i loro centri giacciono in un'altra parabola. Le due parabole sono nel medesimo piano, il quale sega i coni di second'ordine passanti per la cubica gobba, spigolo di regresso della sviluppabile, secondo coniche tutte parabole. Per la cubica passano due cilindri (di second'ordine) uno parabolico e l'altro iperbolico.

Questa cubica gobba particolare può considerarsi come appartenente all'uno o all'altro de' due generi sopra accennati. Infatti, essa apparterrà al primo genere, ove s'immagini che i tre punti comuni alla cubica ed al piano della locale vengano a riunirsi in un solo, che va necessariamente a distanza infinita. Ovvero apparterrà al secondo genere, se si supponga che i due piani osculatori paralleli vengano a coincidere fra loro, epperò anche col piano della conica locale.

2.° La cubica può avere tutti gli assintoti coincidenti a distanza infinita, ossia essa può essere osculata dal piano all'infinito. In tal caso essa è rappresentabile colle equazioni semplicissime:

$$\frac{x}{a} = \theta^3 , \quad \frac{y}{b} = \theta^2 , \quad \frac{z}{c} = \theta$$

e si ha il teorema:

Una superficie sviluppabile del quart' ordine che abbia un piano tangente a distanza infinita è tagliata da tutti gli altri piani tangenti secondo parabole. Per lo spigolo di regresso passa un solo cilindro (di second' ordine) parabolico.

In quest' ultimo caso (che è una particolarizzazione del precedente) la curva, oltre le proprietà generali di ogni cubica gobba, ne ha molte di speciali, di cui si tratterà in altra occasione.

Cremona, 22 febbraio 1859.