

SUR LES CONIQUES SPHÉRIQUES
ET NOUVELLE SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 498 *). [21]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.^{re} série, tome XIX (1860), pp. 269-279.

Dans le n.º 13 (26 mars 1860) des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, M. CHASLES a communiqué un résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales. L'illustre géomètre déduit ses nombreux théorèmes d'un petit nombre de propositions fondamentales. Ce sont ces propositions fondamentales que nous allons démontrer.

À cause de la dualité constante à laquelle est soumise toute la géométrie de la sphère, la théorie des coniques homofocales donne lieu à une autre série de théorèmes. C'est, comme le dit l'auteur même, la théorie des *coniques homocycliques*. Dans notre analyse, les variables x, y, z pourront exprimer indifféremment des coordonnées cartésiennes de points ou des coordonnées *tangentielles* de lignes. Dans la première hypothèse, il s'agira de coniques homocycliques; dans l'autre de coniques homofocales. Pour fixer les idées, nous supposerons que les coordonnées se rapportent à des points; le lecteur en fera mentalement la transformation, s'il veut obtenir les propriétés des coniques homofocales.

1. Soient $x : y : z$ les coordonnées orthogonales d'un point quelconque d'une surface sphérique donnée [23]. L'équation générale d'une conique (ligne de second ordre) est

$$(1) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\zeta xy = 0.$$

La conique est un (petit) cercle si son équation est de la forme qui suit:

$$(2) \quad \lambda (x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = 0;$$

*) Pour bien comprendre ce travail, il est nécessaire d'avoir devant soi le n.º 13 des *Comptes rendus*.

le centre *sphérique* du cercle est le pôle (absolu) de la ligne géodésique (grand cercle):

$$ax + by + cz = 0.$$

Le cercle (2) devient géodésique (grand cercle) si $\lambda=0$.

Pour λ infini on a le cercle imaginaire

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

situé à une distance infinie (car il est la ligne du contact idéal entre la sphère et son cône asymptote).

L'équation (2) démontre que:

Tous les cercles (grands ou petits) tracés sur la sphère peuvent être considérés comme des coniques sphériques qui ont un double contact avec le cercle imaginaire à l'infini.

2. Soit

$$(4) \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

un point de la surface sphérique. La géodésique polaire relative au cercle imaginaire (3) pris comme courbe directrice est

$$(5) \quad x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0,$$

et la géodésique polaire du même point, par rapport à la conique (1), est

$$(6) \quad x(\alpha x_0 + \varphi y_0 + \varepsilon z_0) + y(\varphi x_0 + \beta y_0 + \delta z_0) + z(\varepsilon x_0 + \delta y_0 + \gamma z_0) = 0.$$

Si les deux lignes géodésiques (5) et (6) doivent coïncider, c'est-à-dire si le point (4) a la même polaire par rapport à la conique (1) et au cercle imaginaire (3), on aura

$$\alpha x_0 + \varphi y_0 + \varepsilon z_0 = \theta x_0,$$

$$\varphi x_0 + \beta y_0 + \delta z_0 = \theta y_0,$$

$$\varepsilon x_0 + \delta y_0 + \gamma z_0 = \theta z_0.$$

L'élimination de $x_0 : y_0 : z_0$ de ces équations donne une équation cubique en θ ; on sait que cette équation résultante a ses racines réelles, et que si l'on désigne par

$$(7) \quad (x_1 : y_1 : z_1), (x_2 : y_2 : z_2), (x_3 : y_3 : z_3)$$

les systèmes de valeurs de $(x_0 : y_0 : z_0)$ qui correspondent aux trois valeurs de l'in-

déterminée θ , on a :

$$x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0,$$

$$x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0,$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Donc les trois points (7) sont les sommets d'un triangle trirectangle, et par conséquent la géodésique polaire de chacun d'eux par rapport à la conique (1) et au cercle (3) (ou absolu) passe par les autres deux. En prenant ce triangle pour triangle des coordonnées, c'est-à-dire en posant

$$(7)' \quad y_1 = z_1 = 0, \quad z_2 = x_2 = 0, \quad x_3 = y_3 = 0$$

l'équation (1) deviendra

$$(8) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0.$$

La forme de cette équation enseigne que si par l'un quelconque des points (7)' on mène arbitrairement une corde (géodésique) de la conique (8), elle y est partagée en parties égales.

Donc les points (7)' sont des *centres* de la conique sphérique. En supposant $\alpha > \beta > 0$ et $\gamma < 0$, le point $x = y = z = 0$ est le centre intérieur; les autres sont au dehors de la courbe.

Ainsi :

Les centres d'une conique sphérique sont des points dont chacun a la même géodésique polaire par rapport à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini.

3. Le tétragone *) complet (imaginaire) inscrit à la conique (8) et au cercle imaginaire (3) a deux côtés réels; les autres sont imaginaires. En effet, en combinant les équations (3) et (8), on obtient :

$$(\alpha - \beta) y^2 + (\alpha - \gamma) z^2 = 0, \quad \text{deux géodésiques imaginaires;}$$

$$(\gamma - \beta) x^2 + (\alpha - \beta) z^2 = 0, \quad \text{deux géodésiques réelles;}$$

$$(\alpha - \gamma) x^2 + (\beta - \gamma) y^2 = 0, \quad \text{deux géodésiques imaginaires.}$$

Donc la conique (8) et le cercle (3) ont en commun les cordes géodésiques réelles

$$(9) \quad x \sqrt{\beta - \gamma} + x \sqrt{\alpha - \beta} = 0, \quad x \sqrt{\beta - \gamma} - x \sqrt{\alpha - \beta} = 0.$$

*) Donné par les six grands cercles joignant les intersections de (3) et (8).

Une géodésique quelconque

$$(10) \quad ax + by + cz = 0$$

est tangente à la courbe (8), si on satisfait à la condition

$$(11) \quad \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0.$$

Soient ω , ω' les angles que la géodésique (10) fait avec les géodésiques (9); nous aurons

$$\cos \omega = \frac{a\sqrt{\alpha-\beta} + c\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad \cos \omega' = \frac{a\sqrt{\alpha-\beta} - c\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\alpha-\gamma}};$$

donc, si l'on pose

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\tan^2 \theta,$$

en vertu de la condition (11), on obtient

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega' - 2 \cos 2\theta \cdot \cos \omega \cos \omega' = \sin^2 2\theta,$$

d'où:

$$\omega \pm \omega' = 2\theta = \text{constante},$$

c'est-à-dire la surface du triangle sphérique formé par les trois géodésiques (9) et (10) est constante, quelle que soit la tangente (10).

Les géodésiques (9) sont appelées *lignes cycliques* de la conique sphérique (8).

Donc:

Les lignes cycliques d'une conique sphérique sont les deux arcs de grands cercles (toujours réels) sur lesquels se trouvent les points d'intersection (imaginaires) de la conique et du cercle imaginaire situé à l'infini.

4. Pour obtenir les géodésiques tangentes communes à la conique (8) et au cercle (3), cherchons les points communs à leurs courbes réciproques:

$$(12) \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Celles-ci ont en commun les cordes réelles

$$(13) \quad x\sqrt{\beta(\alpha-\gamma)} \pm y\sqrt{\gamma(\beta-\alpha)} = 0;$$

donc les pôles (absolus ou relatifs au cercle (3), ce qui est la même chose) de ces lignes, savoir les points

$$(14) \quad x = 0, \quad y : z = \pm \sqrt{\gamma(\beta - \alpha)} : \sqrt{\beta(\alpha - \gamma)}$$

sont les sommets réels du quadrilatère complet (imaginaire) circonscrit à la conique (8) et au cercle (3). Les géodésiques (13) sont les lignes cycliques de la conique (12), et par conséquent la somme ou la différence des angles qu'elles forment avec une tangente quelconque de cette courbe est constante. Donc la somme ou la différence des arcs géodésiques qui joignent les points (14) à un point quelconque de la conique (8) est constante.

Ces points (14) sont appelés les *foyers* de la conique sphérique (8).

Ainsi :

Les foyers d'une conique sphérique sont les points de concours (toujours réels) des géodésiques tangentes communes à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini).*

Il s'ensuit :

Deux coniques sphériques homocycliques sont deux coniques dont le tétragone inscrit est aussi inscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.

Deux coniques sphériques homofocales sont deux coniques dont le quadrilatère circonscrit est aussi circonscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.

5. Les équations :

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$A' = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda'(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

représentent deux coniques sphériques homocycliques. Soit

$$U = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\varphi xy = 0$$

une autre conique quelconque. Les équations

$$(15) \quad B = U + \mu A = 0, \quad B' = U + \mu' A' = 0$$

représenteront deux coniques circonscrites, l'une au tétragone UA**), l'autre au

*) Comme dans les coniques planes.

**) Donnée par l'intersection de U et de A.

tétragone UA' . Des équations (15) on tire :

$$\begin{aligned} B - B' &= \mu A - \mu' A', \\ \mu' B - \mu B' &= (\mu' - \mu) U + (\lambda - \lambda') \mu \mu' (x^2 + y^2 + z^2); \end{aligned}$$

donc l'équation

$$B - B' = 0$$

représente une conique circonscrite au tétragone BB' et homocyclique aux coniques A, A' , et l'équation :

$$\mu' B - \mu B' = 0$$

représente une conique circonscrite au tétragone BB' et homocyclique à U .

Donc :

THÉOREME I. *Étant données deux coniques homocycliques A, A' et une troisième conique quelconque U , si aux tétragones UA, UA' on circonscrit deux coniques quelconques B, B' , le tétragone BB' sera inscrit tout à la fois à une conique homocyclique aux deux A, A' et à une conique homocyclique à U .* (CHASLES).

6. Soient encore données les coniques A, A', U , d'où l'on déduit B, B' . On peut donner à la fonction $B + kB'$ la forme

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Il suffit, en effet, de poser

$$k + 1 = 0, \quad \mu - \mu' = 0;$$

alors on a :

$$B - B' = \mu (\lambda - \lambda') (x^2 + y^2 + z^2),$$

c'est-à-dire les coniques B, B' sont homocycliques.

Ainsi :

THÉOREME II. *Étant données deux coniques homocycliques A, A' et une troisième conique quelconque U , si au tétragone UA on circonscrit une conique quelconque B , on pourra circoncrire au tétragone UA' une conique B' homocyclique à B .* (CHASLES).

7. Soient données trois coniques homocycliques :

$$\begin{aligned} A &= ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ A' &= ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda' (x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ A'' &= ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda'' (x^2 + y^2 + z^2) = 0, \end{aligned}$$

et une quatrième conique quelconque :

$$U = 0,$$

d'où nous dérivons les trois coniques qui suivent :

$$B = U + \mu A = 0,$$

$$B' = U + \mu' A' = 0,$$

$$B'' = U + \mu'' A'' = 0.$$

On peut circoncrire au tétragone BB' une conique qui coïncide avec B'' . En effet, on a :

$$B + kB' = (1+k)U + \mu A + k\mu' A',$$

donc, si nous posons :

$$k = \frac{\mu(\lambda'' - \lambda)}{\mu'(\lambda' - \lambda'')} \quad \text{et} \quad \mu'' = \frac{\mu\mu'(\lambda' - \lambda)}{\mu(\lambda'' - \lambda) + \mu'(\lambda' - \lambda'')},$$

on obtient

$$B + kB' = (1+k)B''.$$

Donc :

THÉORÈME III. *Étant données trois coniques homocycliques A, A', A'' et une quatrième conique quelconque U , si aux deux tétragones UA, UA' on circonscrit deux coniques B, B' , les deux tétragones UA'' et BB' seront inscrits dans une même conique B'' . (CHASLES).*

8. Soient données trois coniques :

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = U - V = 0$$

circonscrites à un même tétragone. On décrit une conique

$$U' = U + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

homocyclique à U , et une autre conique

$$V' = V + \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

homocyclique à V . Il s'ensuit que la conique

$$W' = U' - V' = W + (\lambda - \mu)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

est tout à la fois circonscrite au tétragone $U'V'$ et homocyclique à W . De plus, les tétragones $UV, U'V'$ sont inscrits dans une même conique

$$K = \mu U' - \lambda V' = \mu U - \lambda V = 0.$$

Ainsi :

THÉOREME IV. *Quand trois coniques U, V, W sont circonscrites à un même tétragone, si l'on décrit deux coniques U', V' homocycliques à U et V respectivement, on pourra circonscrire au tétragone U'V' une conique W' homocyclique à la troisième conique W. Et les deux tétragones UV, U'V' auront leurs huit sommets situés dans une même conique.* (CHASLES).

Il suit d'ici qu'on aura deux faisceaux homographiques de coniques, dont les bases sont les tétragones UV, U'V', et les deux coniques correspondantes :

$$U - iV = 0, \quad U' - iV' = 0$$

sont toujours homocycliques.

Il est évident qu'à la condition d'être homocycliques on peut substituer celle de rencontrer une conique donnée dans un même système de quatre points réels ou imaginaires. En vertu de cette observation, les quatre théorèmes de M. CHASLES ne constituent qu'un théorème unique, auquel on peut donner l'énoncé suivant :

Étant données plusieurs coniques :

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W_r = U - i_r V = 0$$

circonscrites à un même tétragone, et une autre conique quelconque

$$C = 0;$$

si aux tétragones UC, VC on circonscrit deux coniques U', V', on pourra circonscrire aux tétragones W_r C respectivement des coniques W'_r qui soient toutes circonscrites au tétragone U'V'. Et les deux tétragones UV, U'V' auront leurs huit sommets situés sur une même conique

$$K = 0.$$

Il s'ensuit encore :

Si deux tétragones UK, U'K inscrits dans une même conique K sont les bases de deux faisceaux homographiques de coniques, les points d'intersection de deux coniques correspondantes

$$\begin{aligned} \lambda W_r &= (\lambda - i_r \mu) U - i_r K = 0, \\ \lambda W'_r &= (\lambda - i_r \mu) U' - i_r K = 0 \end{aligned}$$

se trouvent toujours dans une même conique :

$$U - U' = 0. \quad [^{24}]$$

Et réciproquement :

Afin que toutes les intersections des couples de coniques correspondantes de deux faisceaux homographiques appartiennent à une même conique, il faut que les tétragones, bases des faisceaux, soient inscrits à une même conique.

Ces théorèmes généraux ne cessent pas d'avoir lieu en substituant aux coniques circonscrites à un même tétragone des courbes sphériques de l'ordre n circonscrites à un même polygone sphérique de n^2 sommets.

Théorème général comprenant comme cas très-particulier la question 498. [21]

On donne dans un plan: 1.° une droite fixe; 2.° un point O sur cette droite; 3.° un point fixe A. Trouver une courbe telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette courbe une tangente, et par le point A une parallèle à cette tangente, ces deux droites interceptent sur la droite fixe deux segments comptés du point O, liés entre eux par une relation algébrique du degré n .

On peut considérer ces segments comme des coordonnées tangentielles; donc l'enveloppe demandée est une courbe de la classe n (voir la *Géométrie supérieure* de M. CHASLES, chap. XXIV).

On donne dans l'espace: 1.° une droite fixe; 2.° un point O sur cette droite; 3.° deux points fixes A, B. Trouver une surface telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette surface un plan tangent, et par A, B deux plans parallèles au plan tangent, ces trois plans interceptent sur la droite fixe trois segments comptés du point O, liés entre eux par une relation algébrique du degré n .

L'enveloppe demandée est une surface de la classe n .