
17.

SOLUTION DES QUESTIONS 494 ET 499, [21] MÉTHODE DE GRASSMANN ET PROPRIÉTÉ DE LA CUBIQUE GAUCHE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.^{re} série, tome XIX (1860), pp. 356-361.

La question 499 embrasse deux énoncés, qui, si je ne me trompe, exigent quelques corrections. Dans le premier énoncé, les droites B, D et le point m sont des éléments fixes superflus à la construction du point variable p . Il suffirait de dire: " Si les côtés " ap, cp, ac d'un triangle variable acp tournent autour de trois points fixes l, s, o , et " si deux sommets a, c glissent sur deux droites fixes A, C, le troisième sommet p " décrira une conique „. C'est le célèbre théorème de MACLAURIN et BRAIKENRIDGE. Si le lieu du point p doit être une cubique (courbe du troisième ordre), il faut modifier les données de la question.

Le deuxième énoncé n'est pas complet. On n'y trouve pas de données suffisantes pour définir un lieu géométrique. Il faut lire: " Si les côtés ab, bc, cd, da et la diagonale bd d'un quadrilatère plan variable $abcd$ tournent autour de cinq points fixes " o, p, q, r, s , et les sommets a, c , qui sont au dehors de la diagonale, glissent sur " deux droites fixes M, N, chacun des autres sommets b, d décrira une cubique „.

Ce beau théorème a été donné par un éminent géomètre allemand, M. HERMANN-GUNTHER GRASSMANN, de Stettin*), dans un Mémoire inséré dans le t. XXXI du *Journal de Crelle*, p. 111-132; 1846.

A l'occasion de ces théorèmes qui se rapportent à la *géométrie des intersections*, je ne puis m'empêcher de mentionner une méthode très-expéditive et très-curieuse, dont la première idée paraît appartenir à LEIBNIZ, mais qui a été vraiment établie

*) Professeur au gymnase de Stettin. Né dans cette ville en 1809.

par M. GRASSMANN dans un ouvrage intéressant (*die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre*), imprimé à Leipzig en 1844, et dans des Mémoires postérieurs (*Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft*, Leipzig, 1847, *Journal de Crelle*, t. XXXI, XXXVI, XLII, XLIV, XLIX, LII). Excepté MM. MÖBIUS (*Preisschriften, etc., ut supra*) et BELLAVITIS (*Atti dell'Istituto Veneto*, decembre 1854), je ne sache pas que quelque géomètre ait donné aux recherches de M. GRASSMANN l'attention qu'elles méritent.

Je vais reproduire ici les premières définitions et conventions de cette ingénieuse théorie, que l'auteur nomme *analyse géométrique*. Je désignerai toujours les points par de *petites* lettres, et les droites par des lettres *majuscules*.

Première définition. ab représente la droite qui joint les points a et b .

Deuxième définition. AB représente le point commun aux droites A et B .

Conventions. On pose :

$ab = 0$ si les points a et b coïncident;

$AB = 0$ si les droites A et B (indéfinies) coïncident;

$aB = 0$ ou bien $Ba = 0$ si le point a est sur la droite B .

Cela posé, soient a, b deux points fixes, x un point variable :

$$abx = 0$$

est l'équation d'une droite, car elle exprime que x est toujours sur ab . De même

$$ABX = 0$$

est l'équation d'un point, enveloppe de la droite mobile X .

M. GRASSMANN démontre la proposition qui suit, et qui est la généralisation du théorème de PASCAL (*hexagramma mysticum*).

“ Si un point x mobile dans un plan est assujetti à la condition qu'un certain point et une certaine droite, *déduisibles* du point x et d'une série de points et droites fixes au moyen de constructions exécutées avec la seule règle, doivent tomber l'un dans l'autre, et si le point x a été employé n fois dans ces constructions, le lieu du point x sera une courbe de l'ordre n „

L'auteur donne aussi le théorème corrélatif pour la génération des courbes de la classe n , et les propositions analogues dans l'espace pour la génération des surfaces algébriques.

La construction du point variable $x(p)$ dans le premier énoncé rectifié, question 499, est représentée par l'équation *planimétrique* (selon l'appellation de M. GRASSMANN) :

$$x s C o A l x = 0$$

(la droite xs coupe C dans un point, la droite qui passe par ce point et par o rencontre A dans un autre point qui avec l donne une droite passant par x).

Cette équation contient deux fois l'élément variable x , et par conséquent, selon le théorème général de M. GRASSMANN, elle appartient à une conique. Cette conique passe par les cinq points :

$$s, l, AC, soA, loC;$$

ce qui est évident, parce que chacun d'eux satisfait identiquement l'équation de la courbe.

Dans l'autre énoncé, question 499, la construction du point variable $x(b)$ est indiquée par l'équation planimétrique qui suit :

$$(xpNq)(xoMr)(xs) = 0$$

(exprimant que les trois droites $xpNq$, $xoMr$, xs passent par un même point). Cette équation contient trois fois le point variable x ; donc elle appartient à une cubique. On trouve aisément que cette courbe contient les neuf points :

$$o, p, s, MN, (pq)(or), qsN, rsM, pqM, orN.$$

M. GRASSMANN démontre que l'équation ci-dessus est complètement générale, c'est-à-dire, elle représente toute courbe plane du troisième ordre.

La question 494 (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 444) est un autre théorème de M. GRASSMANN (*Journal de Crelle*, t. XXXI). La construction du point variable $x(q)$ donne l'équation planimétrique

$$(xaA)(xbB)(xcC) = 0,$$

exprimant que les trois points xaA , xbB , xcC sont en ligne droite. L'équation contient trois fois l'élément variable x , donc le lieu de la question 494 est une cubique, qui passe par les neuf points :

$$a, b, c, BC, CA, AB, bcA, caB, abC.$$

Soit X la droite variable qui contient les trois points xaA , xbB , xcC : on aura évidemment

$$(XAa)(XBb)(XCc) = 0;$$

donc la droite X enveloppe une courbe de la troisième classe, qui touche les neuf droites :

$$A, B, C, bc, ca, ab, BCa, CAb, ABc.$$

Ainsi on peut regarder comme résolues les questions 494 et 499.

Propriété de la cubique gauche.

J'ai trouvé cette propriété en m'occupant de cette courbe à double courbure dans ma solution de la question 435 (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 199).

“ Par une cubique gauche osculée par le plan à l'infini passe un seul cylindre du second ordre, et ce cylindre est parabolique „. J'ai énoncé cette proposition dans mon dernier Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica* (Rome, juillet et août 1859): *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine*. Or voici le nouveau théorème.

“ Pour chaque plan parallèle au cylindre, la courbe admet un système de cordes parallèles à ce plan, dont les points milieux sont situés sur une même droite (diamètre). Ce diamètre passe par le point de la cubique gauche où elle est touchée par un plan parallèle aux cordes; il est la droite d'intersection du plan osculateur avec le plan asymptote, qui correspondent à ce même point (par chaque point de la courbe passe un plan asymptote, c'est-à-dire tangent à l'infini, et tous ces plans sont parallèles entre eux).

“ Donc par chaque point de la courbe passe un diamètre, qui bissecte les cordes parallèles au plan qui touche, sans osculer, la courbe au même point [²⁵]. Tous ces diamètres sont parallèles à un même plan, savoir à la direction des plans asymptotes, et forment une surface du troisième ordre.

“ La courbe admet au moins un point (et au plus trois) où la droite tangente et le diamètre correspondant se rencontrent sous un angle droit „.

On voit par là la frappante analogie entre cette courbe à double courbure et la parabole ordinaire *).

*) On peut consulter le Mémoire français de M. CREMONA dans *Crelle*, t. LVIII, p. 138, 1860, qui vient de paraître. On y cite ce théorème remarquable de CAYLEY: « Toute surface réglée (non développable) est d'une classe égale à son ordre ».