50.

NUOVE RICERCHE DI GEOMETRIA PURA SULLE CUBICHE GOBBE ED IN ISPECIE SULLA PARABOLA GOBBA. [26]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, tomo III (1863), pp. 385-398.
Giornale di Matematiche, volume II (1864), pp. 202-210.

I.

Ricordo alcune proprietà delle coniche, che sono o note o facilmente dimostrabili *).

1. Date in uno stesso piano due coniche S e C, il luogo di un punto dal quale si possano condurre due rette tangenti ad S e coniugate rispetto a C, è una conica G passante per gli otto punti in cui le coniche date sono toccate dalle loro tangenti comuni. Sia T la conica polare reciproca di S rispetto a C. La conica G tocca le quattro tangenti comuni ad S, T.

2. Se di due punti coniugati rispetto a C e situati in una tangente di S, l'uno giace in T (o in G), l'altro appartiene a G (o a T). Ossia:

Se un triangolo è circoscritto ad S e due suoi vertici giacciono in G, il terzo vertice cadrà in T; e viceversa, se di un triangolo circoscritto ad S due vertici sono coniugati rispetto a C e giacciono, l'uno in G, l'altro in T, il terzo vertice cadrà in G.

3. L'inviluppo di una retta che tagli le coniche S, C in quattro punti armonici è un'altra conica F, che tocca le otto rette tangenti alle coniche date ne' loro punti comuni, e passa pei punti comuni ad S, T.

Se un triangolo è inscritto in S e tocca con due lati la conica F, il terzo lato inviluppa T; e viceversa, se di un triangolo inscritto in S due lati sono coniugati rispetto a C e toccano l'uno F, l'altro T, il terzo lato sarà tangente ad F.

4. Il luogo di un punto dal quale tirate due tangenti alla conica T, queste riescano coniugate rispetto a C, è un'altra conica J, polare reciproca di F rispetto a C.

*) *Introd. ad una teoria geom. delle curve piane* [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)], 111.

Se un triangolo è circoscritto alla conica T e due suoi vertici sono situati in J, il terzo vertice cadrà in S; ecc.

5. Se la conica S è inscritta in uno, epperò in infiniti triangoli coniugati a C (i quali saranno per conseguenza inscritti in T), le coniche G e T coincidono, cioè T diviene il luogo di un punto ove si seghino due rette tangenti ad S e coniugate rispetto a C. Reciprocamente, le tangenti di S dividono armonicamente T e C.

6. Se la conica S è circoscritta ad uno, epperò ad infiniti triangoli coniugati a C (e circoscritti a T), la conica J coincide con S, e la conica F coincide con T; cioè T diviene l'inviluppo delle rette che tagliano armonicamente S e C. Viceversa le tangenti di T, che concorrono in un punto di S, sono coniugate rispetto a C.

7. Se la conica S tocca C in due punti, anche ciascuna delle coniche T, G, F, ... avrà un doppio contatto con C.

8. A noi avverrà di dovere supporre la conica S reale e C imaginaria *). In tal caso T è sempre reale; mentre le coniche G, F, J possono essere tutte reali, non già tutte imaginarie. In particolare, se si fa l'ipotesi (5), F e J sono imaginarie; e nell'ipotesi (6) è imaginaria G.

II.

9. Sia ora data una cubica gobba **), spigolo di regresso di una superficie sviluppabile Σ di terza classe (e di quart'ordine). Un piano Π osculatore della cubica segherà la superficie secondo una conica S e la toccherà lungo una retta (generatrice) P tangente in un medesimo punto alla cubica gobba ed alla conica S. Per un punto qualunque a del piano Π passano altri due piani osculatori, le intersezioni de' quali con Π sono le tangenti che da a si ponno condurre ad S. I due piani medesimi si taglieranno poi fra loro lungo un'altra retta A.

È evidente che a ciascun punto a del piano Π corrisponde una sola retta A (che noi chiameremo *raggio*) in generale situata fuori del piano medesimo. Diciamo *in generale*, perchè, se a giace nella retta P, ivi Π rappresenta due piani osculatori coincidenti; epperò il corrispondente raggio A sarà la tangente che da a si può tirare alla conica S, oltre a P. La medesima retta P è il raggio corrispondente al punto in cui essa tocca la conica S.

---

*) Quando una linea o una superficie imaginaria (d'ordine pari) è considerata da sè sola (senza la sua coniugata), intendiamo che essa sia coniugata a sè medesima, cioè che una retta qualunque la incontri in coppie di punti imaginari coniugati (o se vuolsi, che essa sia rappresentata da una equazione a coefficienti reali).

) Veggasi *Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches* (Nouvelles Annales de Mathèmatiques, 2e série, t.e 1er, Paris 1862, p. 287 [Queste Opere, n. **37]).

10. Sia Π_1 un altro piano osculatore della cubica, il quale seghi la sviluppabile Σ secondo una conica S', e la tocchi lungo una retta (generatrice) P_1. Se si chiamano *corrispondenti* i punti a, a' in cui i due piani Π, Π_1 sono incontrati da uno stesso raggio A, è evidente che ad ogni punto di Π corrisponderà un solo punto di Π_1, e reciprocamente. Se a giace in P, a' giacerà nella retta $\Pi\Pi_1$; e se a è in quest'ultima retta, a' cade in P_1. Se a è un punto della conica S, il raggio A diviene una generatrice della sviluppabile Σ; epperò a' apparterrà alla conica S'. Donde segue che ne' punti in cui P, P_1 incontrano la retta $\Pi\Pi_1$, questa tocca rispettivamente le coniche S', S.

11. Se il punto a descrive una retta D nel piano Π, quale sarà il luogo di a' in Π_1? Il raggio A genera un iperboloide Δ, segato da Π secondo la direttrice D ed una generatrice A_0, che è la tangente di S condotta pel punto a_0 comune a D e P. L'iperboloide Δ sega il piano Π_1 secondo un'altra generatrice A_1 (che è la tangente di S' condotta pel punto a_1 comune a D e Π_1) e secondo un'altra retta D' che unisce il punto in cui A_0 incontra Π_1, con quello in cui A_1 sega P_1. Per tal modo, ai punti a della retta D corrispondono i punti a' della retta D'; e le due serie di punti sono projettive (omografiche, collineari), perchè i raggi A sono generatrici di un sistema iperboloidico.

Da ciò che ad ogni retta e ad ogni punto del piano Π (o Π_1) corrispondono una retta ed un punto nel piano Π_1 (o Π), concludiamo che *i due piani*, mercè i raggi A, *sono figurati omograficamente* *).

12. In generale, *se il punto a descrive nel piano* Π *una curva* L *dell'ordine* n, *il corrispondente raggio* A *genererà una superficie gobba* Λ *del grado* (*ordine e classe)* 2n, avente n generatrici A_0 nel piano Π (le tangenti condotte ad S dai punti in cui P sega L) ed altrettante generatrici A_1 nel piano Π_1 (le tangenti condotte ad S' dai punti in cui L incontra Π_1). Dunque *i punti della curva* L, *mediante i raggi* A, *si proietteranno in una curva omografica* L', la quale insieme colle n rette A_1 forma l'intersezione della superficie Λ col piano Π_1.

La curva L' passa pei punti in cui le n rette A_0 incontrano il piano Π_1, ed incontra le n rette A_1 in n punti situati nella retta P_1, ne' quali il piano Π_1 è tangente alla superficie Λ. Così il piano Π tocca la medesima superficie ne' punti in cui la retta P incontra le n generatrici A_0. Dunque la sviluppabile Σ è n volte circoscritta alla superficie Λ, cioè *ciascuna generatrice di* Σ *tocca in* n *punti la superficie* Λ.

---

*) CHASLES, *Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre* (Comptes rendus de l'Acad. des sciences, 10 août 1857).

Se la conica L è la stessa S, la superficie Λ cessa d'esser gobba e diviene la sviluppabile Σ.

16. Nel piano Π sia data una conica C, e siano inoltre: T la conica polare reciproca di S rispetto a C; G la conica luogo di un punto in cui s'incrocino due tangenti di S, coniugate rispetto a C; F la conica inviluppata dalle rette che tagliano armonicamente S e C; J la conica polare reciproca di F rispetto a C; ecc. Alle coniche S, C, T, G, F,... ne corrisponderanno altrettante S', C', T', G', F',... nel piano Π_1: la prima delle quali è l'intersezione della sviluppabile Σ col piano medesimo. E in causa dell'omografia delle figure corrispondenti ne' due piani Π, Π_1, le coniche T', G', F',... avranno rispetto alle S', C' lo stesso significato che le T, G, F,... hanno verso le S, C. Chiameremo poi $X, \Theta, \Gamma, \Phi, \ldots$ le superficie gobbe (analoghe a Λ (15)) del quarto grado, formate dai raggi A corrispondenti ai punti delle coniche C, T, G, F,...

17. La retta P incontri la conica T in due punti e la conica G in altri due punti, che saranno coniugati ordinatamente ai primi due (2), rispetto a C; e da questi punti si tirino quattro tangenti alla conica S. Di queste tangenti le ultime due, essendo entrambe coniugate a P (s'intenda sempre rispetto a C) (1), concorreranno nel polo di P, il qual punto giace nella conica T. La prima e la terza tangente, essendo coniugate fra loro, concorreranno in un punto di G; e per la stessa ragione la seconda e la quarta tangente s'incroceranno in un altro punto di G. Ora le prime due tangenti sono generatrici della superficie Θ, e le altre due della superficie Γ; e i punti doppi di quest'ultima, nel piano Π, sono i tre punti or ora accennati (12). Dunque la curva doppia della superficie Γ giace anche nella superficie Θ.

18. Pei punti in cui la retta $\Pi\Pi_1$ incontra le coniche T, G si conducano i piani osculatori $\pi^1, \pi^2, \omega^1, \omega^2$, le intersezioni de' quali coi piani Π, Π_1 saranno altrettante tangenti delle coniche S, S'. Le rette $\Pi(\omega^1, \omega^2)$ sono entrambe coniugate a $\Pi\Pi_1$ (rispetto a C), quindi esse concorrono nel polo di $\Pi\Pi_1$, cioè in un punto della conica T. Ne segue che la retta $\omega^1\omega^2$ è una generatrice della superficie Θ; epperò il punto in cui questa retta incontra il piano Π_1, ossia il punto comune alle rette $\Pi_1(\omega^1, \omega^2)$, appartiene alla conica T'.

Le rette $\Pi(\pi^1, \omega^1)$ sono coniugate fra loro (rispetto a C), cioè esse concorrono in un punto della conica G. Dunque la retta $\pi^1\omega^1$ è una generatrice della superficie Γ; epperò il punto comune a questa retta ed al piano Π_1, ossia l'intersezione delle rette $\Pi_1(\pi^1, \omega^1)$, appartiene alla conica G'.

Per la stessa ragione la retta $\pi^2\omega^2$ è pur essa una generatrice della superficie Γ, cioè il punto comune alle rette $\Pi_1(\pi^2, \omega^2)$ appartiene alla conica G'.

D'altronde le rette $\Pi_1(\pi^1, \pi^2)$ sono generatrici della superficie Θ, e le $\Pi_1(\omega^1, \omega^2)$ della superficie Γ (12); dunque il piano Π_1 incontra la curva doppia della superficie Γ ne' punti in cui esso è incontrato dalle rette $\omega^1\omega^2, \pi^1\omega^1, \pi^2\omega^2$: punti che appartengono anche alla superficie Θ; come già si è osservato.

III.

19. Applichiamo i risultati ottenuti al caso che la curva cuspidale di Σ sia una *parabola gobba*, cioè che la sviluppabile data abbia un piano tangente Π tutto all'infinito. Supponiamo inoltre che la conica C sia il *circolo imaginario all'infinito*, cioè l'intersezione del piano Π all'infinito con una sfera qualsivoglia. In tal caso, ecco le proprietà che immediate derivano dalle cose premesse.

Se per un punto arbitrario o *dello spazio si conducono rette parallele alle tangenti e piani paralleli ai piani osculatori della parabola gobba, quelle rette formano e quei piani inviluppano un cono $\mathcal{S}$ di secondo grado.*

Sia poi $\mathcal{T}$ il cono (di secondo grado) supplementare di $\mathcal{S}$, cioè il luogo delle rette condotte per *o* perpendicolarmente ai piani osculatori della parabola gobba, ossia l'inviluppo dei piani condotti per *o* perpendicolarmente alle tangenti della medesima curva.

20. *Il luogo di una retta condotta per* o *parallelamente a due piani osculatori perpendicolari fra loro è un cono $\mathcal{G}$ di secondo grado,* che ha in comune i piani ciclici col cono $\mathcal{T}$, e tocca i quattro piani tangenti comuni ai coni $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ (1). Le due rette secondo le quali un piano tangente qualsivoglia del cono $\mathcal{S}$ sega il cono $\mathcal{T}$ sono rispettivamente perpendicolari alle rette secondo le quali il medesimo piano sega il cono $\mathcal{G}$. E se tre piani tangenti al cono $\mathcal{S}$ formano un triedro, due spigoli del quale giacciono nel cono $\mathcal{G}$, il terzo spigolo cadrà nel cono $\mathcal{T}$ (2).

21. *Un piano condotto per* o *parallelamente a due tangenti ortogonali della parabola gobba inviluppa un cono $\mathcal{F}$ di secondo grado,* che ha le stesse rette focali del cono $\mathcal{T}$, e passa per le quattro generatrici comuni ai coni $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$. I due piani tangenti che si ponno condurre al cono $\mathcal{T}$ per una generatrice qualunque del cono $\mathcal{S}$ sono rispettivamente perpendicolari ai piani tangenti del cono $\mathcal{F}$ passanti per la stessa retta; ecc. (3).

Il luogo di una retta condotta per o *perpendicolarmente a due tangenti ortogonali della parabola gobba è un cono $\mathcal{J}$ di secondo grado,* che ha gli stessi piani ciclici del cono $\mathcal{S}$, ecc. (4).

È superfluo accennare che la direzione degli assi principali per tutti questi coni è la medesima.

22. Se l'asse interno (principale) del cono $\mathcal{S}$ è il minimo in grandezza assoluta, questo cono comprende entro di sè tutto il cono $\mathcal{T}$ (cioè $\mathcal{T}$ non è incontrato da alcun piano tangente di $\mathcal{S}$ secondo rette reali), ed il cono $\mathcal{G}$ è imaginario.

Se l'asse interno di $\mathcal{S}$ è il massimo, i coni $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{J}$ sono imaginari; il cono $\mathcal{T}$ è tutto compreso nel cono $\mathcal{G}$ e comprende entro sè il cono $\mathcal{S}$.

Quando l'asse interno è il medio in grandezza assoluta, i coni $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ si segano secondo quattro rette reali ed hanno quattro piani tangenti comuni reali; ed i coni $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$ sono tutti reali.

23. Se la parabola gobba ammette una, epperò infinite terne di piani osculatori ortogonali (quando il quadrato dell'asse interno del cono $\mathcal{S}$ è eguale alla somma dei quadrati degli altri due assi), ogni piano tangente di $\mathcal{S}$ taglia il cono $\mathcal{T}$ secondo due rette ortogonali; il cono $\mathcal{G}$ coincide con $\mathcal{T}$; e i coni $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$ divengono imaginari (5, 8).

24. Se la parabola gobba ammette una, epperò infinite terne di tangenti ortogonali (quando l'inverso quadrato dell'asse interno del cono $\mathcal{S}$ è uguale alla somma degli inversi quadrati degli altri due assi), per ogni generatrice di $\mathcal{S}$ passano due piani tangenti ortogonali di $\mathcal{T}$; il cono $\mathcal{G}$ diviene imaginario; ed i coni $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$ coincidono rispettivamente con $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ (6, 8).

25. Se il cono $\mathcal{S}$ è di rivoluzione, tali sono anche tutti gli altri coni $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$, . . . (7).

IV.

26. *Il luogo di una retta per la quale passino due piani osculatori della parabola gobba, perpendicolari ad un terzo piano osculatore, è una superficie* Θ *del quarto grado* (16, 19).

Il luogo di una retta per la quale passino due piani osculatori ortogonali della parabola gobba è una superficie Γ *del quarto grado* (16, 20).

Per una retta intersezione di due piani osculatori della parabola gobba passano due piani, ciascun de' quali è parallelo a due tangenti ortogonali della medesima curva. *Se i due piani coincidono, il luogo della retta è una superficie* Φ *del quarto grado* (16, 21).

Il luogo di una retta per la quale passino due piani osculatori della parabola gobba ed alla quale siano perpendicolari due tangenti della medesima curva [27] *è una superficie* Υ *del quarto grado.* Ecc. ecc.

Ciascuna di queste superficie gobbe è doppiamente inscritta nella sviluppabile Σ; *ed ha una propria curva doppia, che è del terz'ordine* (15).

27. Sia Π_1 un piano osculatore qualsivoglia della parabola gobba; S' la parabola (piana) secondo la quale esso sega la sviluppabile Σ; P_1 la tangente della parabola gobba, contenuta nel piano Π_1. Le due generatrici della superficie Θ (o Γ o Φ o Υ) contenute nel piano Π_1 saranno le tangenti di S' parallele a quelle due generatrici del cono $\mathcal{T}$ (o $\mathcal{G}$ o $\mathcal{F}$ o $\mathcal{J}$) che sono in un piano parallelo a Π_1. E i punti ove la medesima superficie di quarto grado è toccata dal piano Π_1 saranno le intersezioni delle due anzidette generatrici colla retta P_1 (12).

Quelle superficie di quarto grado segano inoltre il piano Π_1 secondo altrettante coniche T', G', F', . . . La conica T' è la polare reciproca di S' rispetto ad una certa conica immaginaria C'. La conica G' è il luogo di un punto ove si taglino due tangenti di S', coniugate rispetto a C'. La conica F' è l'inviluppo di una retta che tagli S' in due punti coniugati rispetto a C'. Ecc.

28. Siano (π^1, π^2), (ω^1, ω^2) i piani osculatori della data parabola gobba, le intersezioni de' quali con Π_1 sono generatrici rispettivamente di Θ e di Γ (18). In virtù della definizione di queste superficie (26) i piani ω^1, ω^2 sono entrambi perpendicolari a Π_1, epperò si segano lungo una retta generatrice di Θ. Le rette $\Pi_1(\pi^1, \pi^2)$ sono rispettivamente perpendicolari alle rette $\Pi_1(\omega^1, \omega^2)$, epperò ai piani ω^1, ω^2; dunque le rette $\pi^1\omega^1$, $\pi^2\omega^2$ sono generatrici della superficie Γ.

Di qui si ricava ancora che il punto di concorso delle rette $\Pi_1(\pi^1, \omega^1)$, e il punto di concorso delle rette $\Pi_1(\pi^2, \omega^2)$ giacciono nella direttrice della parabola S'; che pel primo di questi punti passa anche la direttrice della parabola intersezione della sviluppabile Σ col piano π^1; che pel secondo punto passa anche la direttrice della parabola intersezione di Σ con π^2; e che pel punto $\Pi_1(\omega^1\omega^2)$ passano le direttrici delle due analoghe parabole contenute nei piani ω^1, ω^2. Ond'è che *quella cubica gobba, in ciascun punto della quale si incontrano due generatrici della superficie* Γ *ed una della superficie* Θ, *è anche il luogo dei punti ove s'incrociano a due a due le rette direttrici delle parabole piane inscritte nella sviluppabile* Σ.

29. Variando il piano osculatore Π_1, il luogo della conica C' è una superficie (imaginaria) gobba X del quarto grado, luogo di una retta che incontri il circolo imaginario all'infinito C, e per la quale passino due piani osculatori della parabola gobba (16). La superficie X ha due generatrici nel piano Π_1 e sono le tangenti della parabola S' dirette ai punti circolari all'infinito del medesimo piano. Ma queste tangenti (imaginarie coniugate) concorrono in un punto reale, che è il fuoco della parabola S'; dunque *la superficie imaginaria* X *ha una curva doppia reale* (14) *che è il luogo dei fuochi delle parabole inscritte nella sviluppabile* Σ. Questa curva è una cubica gobba incontrata da qualunque piano tangente di Σ in un solo punto reale. Gli altri due punti (imaginari coniugati) comuni a questa cubica ed al piano Π_1 giacciono nella conica C' e nelle due tangenti di S' che concorrono nel fuoco.

Nel piano all'infinito Π, le generatrici di X sono le tangenti condotte alla conica S pei punti in cui la retta P sega il circolo imaginario C (17). Quelle due tangenti si segano tra loro in un punto reale e incontrano nuovamente C in due punti imaginari coniugati; dunque la curva luogo dei fuochi ha un solo assintoto reale, e gli altri due imaginari diretti a due punti del circolo imaginario all'infinito: o in altre parole, *tutte le superficie di second'ordine passanti per essa hanno una serie comune (in direzione) di piani ciclici.*

30. Nel piano Π_1 tutte le coniche C', S', T', G', ... sono coniugate ad uno stesso triangolo (reale). Inoltre le coniche C', T', F' sono inscritte in uno stesso quadrilatero (imaginario con due vertici reali); le coniche C', T', G' sono circoscritte ad uno stesso quadrangolo (imaginario con due lati reali); ecc. Or bene, *se si fa variare il piano* Π_1:

I vertici del triangolo coniugato alle coniche S', T', ... descrivono tre rette rispettivamente parallele agli assi principali dei coni $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, ...; e i lati dello stesso triangolo generano tre paraboloidi aventi rispettivamente per piani direttori i piani principali de' medesimi coni (9, 10, 11, 19);

I due lati reali del quadrangolo inscritto nelle coniche T', G' generano due paraboloidi aventi rispettivamente per piani direttori i piani ciclici dei coni $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$ (20);

I due vertici reali del quadrilatero circoscritto alle coniche T', F' descrivono due rette rispettivamente parallele alle focali dei coni $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ (21); ecc.

V.

31. Supponiamo che la data parabola gobba abbia una terna di piani osculatori ortogonali, cioè che la conica S' sia inscritta in un triangolo coniugato a C'. Allora vi saranno infiniti altri triangoli circoscritti ad S' e coniugati a C'; cioè la parabola gobba avrà infinite terne di piani osculatori ortogonali. I triangoli circoscritti ad S e coniugati a C' sono inscritti nella conica T'; quindi la conica G' si confonde con T' (5).

Ne segue che le tangenti di S' condotte pei punti in cui la retta P_1 sega T' (le quali tangenti sono generatrici della superficie Θ) sono coniugate rispetto a C', epperò s'incontrano in un punto di T' medesima, polo di P_1 rispetto a C'. Dunque i tre punti doppi della superficie Θ, contenuti in un piano osculatore qualunque della parabola gobba, si riducono ad un solo punto triplo (15). Ossia *la superficie di quarto grado Θ, luogo delle rette per le quali passano coppie di piani osculatori ortogonali* [28], *ha una retta tripla, perpendicolare alla direzione dei piani che toccano all'infinito la parabola gobba. Per ogni punto di questa retta passano tre piani osculatori ortogonali; e per conseguenza il piano dei tre punti di contatto passa per un' altra retta fissa.*

32. Nel piano osculatore Π_1 le due generatrici di Θ sono fra loro perpendicolari: dunque il loro punto comune giace nella direttrice della parabola S'; ossia *le direttrici delle parabole inscritte nella sviluppabile Σ si segano a tre a tre sulla retta tripla della superficie Θ.*

VI.

33. Per un punto qualunque p_1 della parabola gobba passa una retta (diametro) dimezzante le corde parallele al piano che tocca la curva in p_1 e la sega all'infinito

in p *). Questo diametro è l'intersezione del piano Π_1 osculatore in p_1 col piano $p_1 P$ che sega la curva in p_1 e la tocca all'infinito; onde la traccia di esso diametro sul piano Π all'infinito sarà il punto $(\Pi_1 P)$, e la retta che unisce p col punto $(P_1 \Pi)$ sarà la traccia all'infinito del piano parallelo alle corde bisecate. Se questa retta, che è la polare del punto $(\Pi_1 P)$ rispetto alla conica S, fosse anche la polare dello stesso punto rispetto al circolo imaginario C, cioè se il punto $(\Pi_1 P)$ fosse uno dei vertici del triangolo coniugato alle coniche S, C, il diametro considerato sarebbe perpendicolare alle corde bisecate. *Dunque la parabola gobba avrà un diametro perpendicolare alle corde bisecate, quando i piani che la toccano all'infinito siano paralleli ad uno degli assi esterni del cono* $\mathcal{S}$ (19); e in tal caso il diametro sarà parallelo a questo medesimo asse.

34. Se il cono è di rotazione (25), ogni punto della corda di contatto fra le coniche S, C ha la stessa polare rispetto ad entrambe; quindi vi sarà in questo caso un diametro perpendicolare alle corde bisecate. Questo diametro è perpendicolare all'asse principale del cono $\mathcal{S}$.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, Berlin 1860 [Queste Opere, n. **24** (t. 1.º)], p. 147.