

RAPPRESENTAZIONE DELLA SUPERFICIE DI STEINER
 E DELLE SUPERFICIE GOBBE DI TERZO GRADO
 SOPRA UN PIANO.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie I, volume IV (1867), pp. 15-23.

La superficie di 4.^o ordine e 3^a classe, conosciuta sotto il nome di *superficie Romana*, o *superficie di STEINER*, è suscettibile d'essere rappresentata (punto per punto) sopra un piano, in modo assai semplice.

Ritenute le notazioni già adoperate altrove *), sia $J^{(4)}$ la superficie; o il punto triplo; ot_1, ot_2, ot_3 , le rette doppie; $\omega, \bar{\omega}$ i punti cuspidali in ot ; a il punto conjugato armonico di o rispetto ad $\omega\bar{\omega}$; P un piano tangente qualunque che seghi $J^{(4)}$ secondo le due coniche H, H' , e la tocchi nel punto s ; \mathcal{P} uno dei quattro piani tangenti singolari, ed \mathcal{H} la conica di contatto, cioè una delle quattro coniche costituenti la curva parabolica della superficie.

Ora si può rappresentare, punto per punto, la superficie $J^{(4)}$ sopra un piano Q in modo che alle quattro coniche \mathcal{H} corrispondano quattro rette $[\mathcal{H}]$ formanti un quadrilatero completo, le cui diagonali rappresentino le rette doppie ot . Il punto triplo sarà rappresentato dai tre vertici del triangolo formato dalle diagonali; i punti cuspidali $\omega, \bar{\omega}$ della retta doppia ot , dai vertici $[\omega], [\bar{\omega}]$ del quadrilatero situati nella corrispondente diagonale; ed un punto qualunque della retta doppia ot da due punti della diagonale medesima, conjugati armonici rispetto ai vertici $[\omega], [\bar{\omega}]$.

Le coniche H hanno per immagini le rette $[H]$ del piano Q , in modo che a due coniche H, H' *conjugate*, cioè situate in uno stesso piano P , corrispondono due rette $[H], [H']$, che dividono armonicamente le diagonali $[\omega\bar{\omega}]$.

*) *Giornale BORCHARDT-CRELLE*, tom. 63, pag. 315. [Queste Opere, n. 55].

In un punto qualunque s la superficie $J^{(4)}$ è toccata da un piano che la sega secondo due coniche; le rette corrispondenti in Q s'incrociano nel punto corrispondente $[s]$. Viceversa, in un punto qualunque $[s]$ del piano Q s'intersecano due sole rette *conjugate* $[H]$, $[H']$, ossia due rette che dividono le diagonali in punti conjugati armonici; le corrispondenti coniche H , H' individueranno il punto s , la cui imagine è $[s]$.

Alla sezione fatta in $J^{(4)}$ da un piano qualunque corrisponde una conica che sega armonicamente le diagonali del quadrilatero, e che risulta circoscritta al triangolo diagonale quando il piano dato passa per o .

In generale, l'intersezione di $J^{(4)}$ con una superficie d'ordine n è rappresentata in Q da una curva d'ordine $2n$, che sega ciascuna diagonale in n coppie di punti conjugati armonici rispetto ad $[\omega]$ $[\bar{\omega}]$.

Per $n=2$, avremo in Q una curva di 4.° ordine, imagine della curva gobba secondo la quale $J^{(4)}$ è intersecata da una superficie quadrica. Se la quadrica tocca $J^{(4)}$ in quattro punti (fuori delle rette doppie), la curva piana di 4.° ordine si decompone in due coniche, epperò la curva gobba dell'8.° ordine sarà il sistema di due curve gobbe di 4.° ordine e genere 0 *).

Viceversa, ad una conica qualunque in Q corrisponde in $J^{(4)}$ una curva gobba di 4.° ordine e genere 0; la quadrica (unica) che passa per questa curva segnerà $J^{(4)}$ in un'altra curva analoga, la cui imagine sarà quella conica che incontra ciascuna diagonale ne' punti coniugati armonici di quelli pei quali passa la prima conica. Diremo *conjugate* le due coniche, ed anche le due curve gobbe.

Come caso particolare, le due curve gobbe possono avere un punto doppio (comune) sopra una delle rette ot , ed allora ciascuna d'esse è la base d'un fascio di quadriche toccantisi in quel punto. Ciò avviene quando la conica data, epperò anche la sua coniugata, sega armonicamente una delle diagonali del quadrilatero.

La superficie di STEINER non contiene curve d'ordine dispari; ed ogni curva d'ordine $2n$ situata in essa è punteggiata proiettivamente **) ad una curva piana di ordine n , onde il suo genere non potrà superare il numero $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Se la curva in $J^{(4)}$ non ha punti doppi, il suo genere sarà precisamente $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; quindi il numero de' suoi punti doppi apparenti sarà $\frac{3}{2}n(n-1)$; l'ordine della sviluppabile osculatrice $n(n+1)$; la classe di questa sviluppabile $3n(n-1)$; ecc.

*) Sulla divisione delle curve in generi (dovuta a RIEMANN e CLEBSCH) vedi i miei *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, Bologna 1866 [Queste Opere, n. 70]. Le curve gobbe di 4.° ordine e genere 0, senza punto doppio, sono quelle che si dicono anche di 2^a specie; vedi *Annali di Matematica*, tom. 4, pag. 71 (Roma 1862) [Queste Opere, n. 28 (t. 1°)].

**) *Teoria geom. delle superficie*, 54.

Consideriamo le coniche del piano Q , inscritte nel quadrilatero, delle quali passano due per un punto qualunque $[s]$, e sono ivi toccate da due rette dividenti le diagonali in punti armonici, cioè dalle due rette conjugate $[H]$, $[H']$ incrociate in quel punto. Le rette che in s hanno un contatto tripunto con $J^{(4)}$ (rette osculatrici, *Haupttangenten*, *inflectional tangents*) sono le tangenti alle due coniche H , H' , poste nel piano P che tocca la superficie in s ; dunque le coniche che in Q sono inscritte nel quadrilatero rappresentano quelle curve (curve assintotiche di DUPIN, *Curven der Haupttangenten*) che in $J^{(4)}$ sono toccate dalle rette osculatrici alla superficie. Cioè le curve assintotiche di $J^{(4)}$ sono di 4.° ordine e di genere 0, e propriamente sono tutte quelle che toccano le quattro coniche \mathcal{H} *). Le medesime curve hanno un contatto quadri-punto con ciascuno dei quattro piani \mathcal{P} , e sono incontrate in quattro punti armonici da ogni piano tangente della superficie.

Due coniche conjugate nel piano Q sono polari reciproche rispetto ad una conica fissa, che è la così detta *conica dei 14 punti* **), e corrisponde alla sezione fatta in $J^{(4)}$ dal piano $a_1 a_2 a_3$. Ne segue che le coniche conjugate alle inscritte nel quadrilatero formano un fascio, epperò le curve gobbe di 4.° ordine che in $J^{(4)}$ sono conjugate alle curve assintotiche, passano tutte per quattro punti fissi $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$. Una curva assintotica e la sua conjugata giacciono in una stessa superficie quadrica, e tutte le quadriche analoghe sono conjugate al tetraedro $oa_1 a_2 a_3$. Queste superficie possono adunque definirsi come coniugate al detto tetraedro, passanti per un punto π e tangenti ad una conica \mathcal{H} ; giacchè le quadriche così definite passano anche per gli altri tre punti π , e toccano le altre coniche \mathcal{H} . Questa serie di superficie di 2.° ordine (le cui caratteristiche, secondo CHASLES, sono $\mu=3$, $\nu=6$, $\rho=6$) comprende tre coni, i cui vertici sono a_1, a_2, a_3 , e tre coppie di piani, ciascuna delle quali è formata da due piani segantisi lungo una retta ot e passanti rispettivamente per due spigoli opposti del tetraedro $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \mathcal{P}_4$. La curva assintotica contenuta in uno dei tre coni ha un punto doppio nel vertice di questo, ed è rappresentata dalla conica inscritta nel quadrilatero

*) L'illustre signor CLEBSCH, professore all'università di Giessen, della cui amicizia altamente mi onoro, scrivevami il 21 luglio 1866 d'aver trovato « *durch Integration* » che « *die Curven der Haupttangenten der Steinerschen Fläche sind algebraisch: es sind Raumcurven vierter Ordnung unde zweiter Species, und zwar sind sie dadurch definiert dass sie die vier Kegelschnitte berühren, in welche die Hessesche Wendecurve zerfällt* » [136]. Un risultato così elegante m'invogliò a cercarne la dimostrazione per via geometrica; e la trovai nella rappresentazione della superficie sopra un piano, la quale forma l'argomento della presente lettura, e che già ho comunicata per intero al signor CLEBSCH con lettera del 25 settembre.

**) Vedi *the Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, tom. 3, pag. 13 e 88. [Queste Opere, n. 64, 65].

la quale divide armonicamente la relativa diagonale $[\omega \bar{\omega}]$. La curva assintotica corrispondente ad una qualunque delle tre coppie di piani degenera nella retta ot comune a questi piani. Fra le superficie quadriche di cui si tratta, è poi osservabile quella che sega $J^{(4)}$ secondo due curve entrambe assintotiche; le loro immagini sono quelle due coniche conjugate che toccano entrambe i quattro lati del quadrilatero.

Quando i quattro piani \mathcal{P} siano immaginari, il quadrilatero in Q potrebbe essere scelto in modo che due vertici opposti siano i punti circolari all'infinito; allora le curve assintotiche della superficie di STEINER sarebbero rappresentate da un sistema di coniche (elissi ed iperbole) confocali; e le immagini delle sezioni piane della superficie medesima sarebbero le iperbole equilatera che dividono armonicamente la distanza focale.

Ho supposta fin qui la superficie di STEINER affatto generale, cioè dotata di tre rette doppie distinte; ma vi sono due casi particolari che richieggono una trattazione speciale *).

Il primo caso corrisponde alla coincidenza di due rette doppie in una sola retta ot , lungo la quale la superficie avrà un contatto di 3.° ordine con un piano fisso \mathcal{P} . La superficie possiede un'altra retta doppia ot' , ed in questa (oltre il punto triplo o) un punto cuspidale ω ; e due altri piani singolari $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, tangenti lungo due coniche $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Siano p_1, p_2 i punti in cui queste sono incontrate dalla retta doppia ot .

Nel piano Q si conducano da uno stesso punto $[\omega]$, assunto come immagine di ω , quattro rette che potranno rappresentare le due coniche $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, la retta ot' e la conica contenuta nel piano tangente in ω ; purchè di queste quattro rette le prime due siano conjugate armoniche rispetto alle altre due. Le medesime rette siano poi segate nei punti $[p_1], [p_2], [o], [o']$ da una retta condotta ad arbitrio come rappresentante di ot . Allora il punto triplo o sarà rappresentato dai punti $[o], [o']$ e dal punto della retta $[\omega][o]$ successivo ad $[o]$; ossia, le sezioni fatte nella superficie con piani passanti per o avranno per immagini le coniche passanti per $[o']$ e tangenti in $[o]$ ad $[\omega][o]$. Una sezione piana qualunque è rappresentata da una conica che divide armonicamente i segmenti $[\omega][o], [p_1][p_2]$; la quale si decompone in due rette quando il piano segante è un piano tangente, epperò la sezione si risolve in un paio di coniche.

Le coniche tangenti alle rette $[\omega][p_1], [\omega][p_2]$, ed alla $[o][o']$ in $[o]$ rappresentano le curve assintotiche, le quali sono curve di 4.° ordine e genere 0, passanti pel punto

*) Il signor CLEBSCH mi comunicò l'esistenza del primo di questi casi; l'altro parmi non sia ancora stato osservato da alcuno.

triplo, ed aventi ivi un contatto tripunto colla retta ot , ed un contatto quadripunto col piano \mathcal{P} . Le medesime curve hanno un contatto quadripunto anche coi piani $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Si ottiene il secondo caso quando le tre rette doppie coincidono in una retta unica ot . Oltre il piano \mathcal{P}' che ha colla superficie un contatto di 3.^o ordine lungo ot , v'è un altro piano singolare \mathcal{P} , tangente secondo una conica \mathcal{H} ed incontrato da ot in un punto p . Descrivasi nel piano Q un triangolo $[o][p]q$; siano m, m' due punti conjugati armonici rispetto ad $[o][p]$, e col centro $[p]$ si formi un fascio semplice di raggi $[p]m_0$, proiettivo all'involuzione de' punti (m, m') , a condizione che ai punti doppi $[o], [p]$ di questa corrispondano i raggi $[p][o], [p]q$. Allora la rappresentazione della superficie sul piano Q può essere fatta in maniera che la retta doppia ot sia rappresentata da $[o][p]$, il punto triplo o da $[o]$ (ossia da tre punti infinitamente vicini in una conica tangente in $[o]$ alla retta $[o][p]$), e la conica \mathcal{H} da $[p]q$; la retta $[o]q$ rappresenterà la conica contenuta in un piano passante per ot . Due coniche della superficie situate in uno stesso piano tangente avranno per immagini due rette passanti per due punti conjugati m, m' , e segantisi in un punto della corrispondente retta $[p]m_0$. L'immagine d'una sezione piana qualunque è una conica segante $[o][p]$ in due punti conjugati m, m' , ed avente il polo di $[o][p]$ situato su $[p]m_0$.

Le curve assintotiche sono rappresentate da coniche tangenti a $[p]q$ ed osculanti fra loro nel punto $[o]$ colla tangente $[o][p]$; epperò sono curve di 4.^o ordine, cuspidate nel punto triplo, colla tangente ot e col piano osculatore \mathcal{P}' . Queste curve hanno inoltre un contatto di 3.^o ordine col piano \mathcal{P} *).

In modo somigliante si possono rappresentare sopra un piano le superficie gobbe di 3.^o grado.

La superficie gobba $S^{(3)}$ abbia da prima due direttrici rettilinee distinte, D, E : l'una luogo dei punti doppi, l'altra involuppo dei piani bitangenti **). Questa superficie può essere rappresentata, punto per punto, sopra un piano Q in modo che, detti α, β i punti rappresentativi dei punti cuspidali di $S^{(3)}$, la retta $\alpha\beta$ sia l'immagine della direttrice doppia D , ed alle generatrici (rettilinee) corrispondano rette passanti per un punto fisso o , situato fuori di $\alpha\beta$. La direttrice E sarà allora rappresentata dal solo punto o ; in altre parole, ai punti di E corrisponderanno i punti del piano Q infinitamente vicini ad o .

*) Vi sono altri due casi della superficie di 4.^o ordine e di 3^a classe (senza contare la sviluppabile che ha per spigolo di regresso una cubica gobba), ma non rientrano nella superficie di STEINER, perchè in essi non ha luogo la proprietà che ogni piano tangente seghi la superficie secondo due coniche (Vedi *Phil. Transactions* 1863, pag. 236-8.)

**) *Atti del R. Istituto Lomb.* Vol. 2, pag. 291. (Maggio 1861.) [Queste Opere, n. 27 (t. 1^o)].

Ad un punto qualunque di D corrispondono due punti diversi, conjugati armonici rispetto ad α, β ; così che due rette passanti per o formanti sistema armonico con $o\alpha, o\beta$, rappresentano due generatrici di $S^{(3)}$ situate in uno stesso piano. E le rette $o\alpha, o\beta$ sono le immagini delle due generatrici singolari, cioè di quelle generatrici lungo le quali il piano tangente è costante.

La sezione fatta in $S^{(3)}$ da un piano arbitrario ha per immagine una conica descritta per o e per due punti che dividono armonicamente il segmento $\alpha\beta$.

Le rette del piano Q , non passanti per o , rappresentano le coniche della superficie.

Una conica in Q , la quale passi per o , ma non seghi armonicamente il segmento $\alpha\beta$, rappresenta una cubica gobba. Una conica conjugata (cioè passante per o e secante $\alpha\beta$ nei punti conjugati armonici di quelli pei quali passa la prima conica) sarà l'immagine di un'altra cubica gobba; e le due cubiche giaceranno in una stessa superficie di 2.° ordine.

Una conica descritta arbitrariamente nel piano Q corrisponde ad una curva di 4.° ordine e di genere 0. La superficie quadrica che passa per questa curva segherà inoltre $S^{(3)}$ secondo due generatrici, rappresentate dalle rette che da o vanno ai punti di $\alpha\beta$, conjugati armonici di quelli pei quali passa la conica.

La direzione assintotica in un punto qualunque della superficie $S^{(3)}$ è data dalla conica che è nel piano tangente in quel punto. Dunque, se m è il corrispondente punto di Q , si tiri om che seghi $\alpha\beta$ in n , e sia n' il conjugato armonico di n rispetto ad $\alpha\beta$; sarà mn' l'immagine della conica, epperò mn' rappresenta in m la direzione assintotica. Ma, se noi immaginiamo una conica tangente in α, β alle rette $o\alpha, o\beta$, comunque si prenda m sul perimetro di questa conica, la retta mn' le sarà sempre tangente. Dunque le coniche tangenti in α, β alle $o\alpha, o\beta$ rappresentano le curve assintotiche della superficie $S^{(3)}$, ond'è che queste curve sono di 4.° ordine e di genere 0, ed hanno un contatto tripunto ne' punti cuspidali colle generatrici singolari *). Le superficie quadriche che le contengono, passano tutte per quattro rette fisse.

Se la superficie $S^{(3)}$ ha le direttrici coincidenti in una sola retta D^{**}), prendasi nel piano Q un triangolo ouv nel quale il vertice o ed i lati ou, ov, uv rappresentino

*) A cagione di questi due punti singolari nei quali le tangenti sono osculatrici, le sviluppabili aventi per ispigoli di regresso le curve assintotiche sono della 4.ª classe; mentre in generale le tangenti di una curva gobba di 4.° ordine e di 2.ª specie formano una sviluppabile di 6.ª classe.

***) *Giornale Borchardt-Crelle*, tom. 60, p. 313. *Phil. Transactions* 1863, pag. 241 [Queste Opere, n. 39].

ordinatamente il punto cuspidale, la generatrice che coincide colla direttrice, un'altra generatrice G scelta ad arbitrio ed una conica C situata con G in uno stesso piano tangente. Poi si determinino sulle rette ou, uv due divisioni omografiche (corrispondenti a quelle che le generatrici di $S^{(3)}$ segnano sulla retta D e sulla conica C), nelle quali ai punti $o, u, \dots m, n, \dots$ corrispondano ordinatamente i punti $u, v, \dots m', n', \dots$

Allora le generatrici sono rappresentate dalle rette passanti per o ; e le altre rette del piano Q saranno le immagini delle coniche tracciate sulla superficie. Una conica di $S^{(3)}$ ed una generatrice giacciono nello stesso piano quando le rette corrispondenti incontrano rispettivamente ou, ov in due punti omologhi m, m' .

Ad una sezione piana qualunque di $S^{(3)}$ corrisponde una conica passante per o , e tale che essa conica e la sua tangente in o segano rispettivamente ou, uv in punti omologhi.

Una conica qualunque in Q , passante per o , è l'immagine di una cubica gobba. Se quella conica sega ou in m , e se la sua tangente in o sega uv in n' : descritta una conica che passi per o , ivi tocchi la retta om' , e seghi ou in n , questa nuova conica rappresenterà un'altra cubica gobba, situata colla prima in una stessa superficie di 2.° ordine.

Una conica arbitraria in Q rappresenta una curva gobba di 4.° ordine e di genere 0. Se la conica sega ou in m, n , le rette om', on' rappresenteranno le generatrici che unite alla curva gobba formano la completa intersezione di $S^{(3)}$ con una quadrica.

Le curve assintotiche sono le cubiche gobbe passanti pel punto cuspidale ed aventi ivi per tangente la retta D e per piano osculatore il piano che oscula $S^{(3)}$ lungo D . Esse sono rappresentate da un fascio di coniche aventi fra loro un contatto di 3.° ordine nel punto o colla tangente ou .

E superfluo aggiungere che, con questo modo di rappresentare le superficie $J^{(4)}$ ed $S^{(3)}$ sopra un piano, si potrà assai facilmente stabilire una teoria delle curve tracciate sopra queste superficie, deducendola dalle proprietà conosciute delle corrispondenti curve piane.