86.

SULLE LINEE DI CURVATURA DELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO. [62]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo I (1870), pp. 49-67.

Consideriamo una superficie algebrica S, dotata della proprietà d'essere rappresentabile *punto per punto* sopra un piano, e siano ξ, η, ζ le coordinate cartesiane di un punto qualunque della superficie, riferita a tre assi obliqui; x_1, x_2, x_3 le coordinate trilineari del punto corrispondente nel piano rappresentativo, nel quale siasi formato il triangolo fondamentale con tre rette scelte ad arbitrio (purchè non concorrenti in uno stesso punto a distanza finita, nè infinita). Allora si potranno riguardare i rapporti $x_1 \colon x_2 \colon x_3$ come coordinate curvilinee pel punto di S; e le coordinate ξ, η, ζ saranno esprimibili come segue:

$$(1) \qquad \xi = \frac{a}{e}, \quad \eta = \frac{b}{e}, \quad \zeta = \frac{c}{e},$$

dove a, b, c, e siano funzioni (algebriche) intere d'uno stesso grado ν ed omogenee nelle x_1, x_2, x_3.

Fra le rette che toccano la superficie nel punto $(\xi\,\eta\,\zeta)$, supposto che questo non sia un punto singolare, distinguiamo le sei seguenti: le due che si dirigono ai punti circolari all'infinito del piano tangente (*rette cicliche*); le due che in quel punto osculano la superficie (*rette osculatrici*), cioè gli assintoti dell'indicatrice di DUPIN; e da ultimo i raggi doppi dell'involuzione quadratica determinata dalle due coppie precedenti. Queste ultime due rette saranno le tangenti alle linee di curvatura incrociate nel punto che si considera.

Formiamo da prima l'equazione che dà le direzioni delle rette cicliche. Dette ξ', η', ζ le coordinate correnti nello spazio, ed α, β, γ i coseni degli angoli fra gli assi, l'equazione del cono che dal punto della superficie projetta il circolo imaginario all'infinito sarà

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2+2\alpha(\eta'-\eta)(\zeta'-\zeta)+ \\ +2\beta(\zeta'-\zeta)(\xi'-\xi)+2\gamma(\xi'-\xi)(\eta'-\eta)=0,$$

epperò, se questo cono contiene la retta che unisce i punti (ξ, η, ζ), $(\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta)$ della superficie S, avremo

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+2\alpha d\eta\, d\zeta+2\beta d\zeta\, d\xi+2\gamma d\xi\, d\eta=0. \tag{2}$$

Ma dalle (1) si cavano le $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ proporzionali alle espressioni seguenti

$$\begin{gathered}
dx_1\Big(x_2(ae)_3-x_3(ae)_2\Big)+dx_2\Big(x_3(ae)_1-x_1(ae)_3\Big)+\\
+dx_3\Big(x_1(ae)_2-x_2(ae)_1\Big),\\
dx_1\Big(x_2(be)_3-x_3(be)_2\Big)+dx_2\Big(x_3(be)_1-x_1(be)_3\Big)+\\
+dx_3\Big(x_1(be)_2-x_2(be)_1\Big),\\
dx_1\Big(x_2(ce)_3-x_3(ce)_2\Big)+dx_2\Big(x_3(ce)_1-x_1(ce)_3\Big)+\\
+dx_3\Big(x_1(ce)_2-x_2(ce)_1\Big),
\end{gathered}$$

dove per brevità si è scritto

$$\begin{aligned}
(ae)_1&=\frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial e}{\partial x_3}-\frac{\partial a}{\partial x_3}\frac{\partial e}{\partial x_2},\\
(ae)_2&=\frac{\partial a}{\partial x_3}\frac{\partial e}{\partial x_1}-\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial e}{\partial x_3},\\
(ae)_3&=\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial e}{\partial x_2}-\frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial e}{\partial x_1},\ \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Dunque, posto:

$$\begin{gathered}
K_{rs}=(ae)_r(ae)_s+(be)_r(be)_s+(ce)_r(ce)_s+\\
+\alpha\Big((be)_r(ce)_s+(be)_s(ce)_r\Big)+\beta\Big((ce)_r(ae)_s+(ce)_s(ae)_r\Big)+\\
+\gamma\Big((ae)_r(be)_s+(ae)_s(be)_r\Big),
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
E_{11}&=x_2^2K_{33}+x_3^2K_{22}-2x_2x_3K_{23}\\
E_{22}&=x_3^2K_{11}+x_1^2K_{33}-2x_3x_1K_{31}\\
E_{33}&=x_1^2K_{22}+x_2^2K_{11}-2x_1x_2K_{12}\\
E_{23}&=-x_1^2K_{23}+x_1x_2K_{13}+x_1x_3K_{12}-x_2x_3K_{11}\\
E_{31}&=-x_2^2K_{31}+x_2x_3K_{21}+x_2x_1K_{23}-x_3x_1K_{22}\\
E_{12}&=-x_3^2K_{12}+x_3x_1K_{32}+x_3x_2K_{31}-x_1x_2K_{33},
\end{aligned} \tag{4}$$

la (2) diverrà

$$\begin{gathered}
E_{11}dx_1^2+E_{22}dx_2^2+E_{33}dx_3^2+\\
+2E_{23}dx_2dx_3+2E_{31}dx_3dx_1+2E_{12}dx_1dx_2=0
\end{gathered} \tag{5}$$

e questa sarà pertanto l'equazione differenziale delle curve tracciate sulla superficie S, le cui tangenti incontrano il circolo imaginario all'infinito *).

Notiamo che dalle (4) si ha

$$\begin{aligned} &x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{13} = 0 \\ &x_1 E_{21} + x_2 E_{22} + x_3 E_{23} = 0 \\ &x_1 E_{31} + x_2 E_{32} + x_3 E_{33} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & l_1 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & l_2 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix} = (l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3)^2 \Theta, \tag{8}$$

essendo

$$\Theta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & x_1 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & x_2 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

In secondo luogo, formiamo l'equazione che dà le direzioni delle rette osculatrici. Posto

$$P_{rs} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} & \frac{\partial a}{\partial x_2} & \frac{\partial a}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 a}{\partial x_r \, \partial x_s} \\ \frac{\partial b}{\partial x_1} & \frac{\partial b}{\partial x_2} & \frac{\partial b}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 b}{\partial x_r \, \partial x_s} \\ \frac{\partial c}{\partial x_1} & \frac{\partial c}{\partial x_2} & \frac{\partial c}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 c}{\partial x_r \, \partial x_s} \\ \frac{\partial e}{\partial x_1} & \frac{\partial e}{\partial x_2} & \frac{\partial e}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 e}{\partial x_r \, \partial x_s} \end{vmatrix} \tag{10}$$

si ha evidentemente

$$\begin{aligned} &x_1 P_{11} + x_2 P_{12} + x_3 P_{13} = 0 \\ &x_1 P_{21} + x_2 P_{22} + x_3 P_{23} = 0 \\ &x_1 P_{31} + x_2 P_{32} + x_3 P_{33} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

---

*) Queste curve imaginarie sono geodetiche sulla superficie S. Il sig. LAGUERRE le chiama *linee isotrope* (vedi *Nouvelles Annales de Mathém.* 1870) — (Aggiunta: agosto 1870).

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & l_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & l_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix} = (l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3)^2 \Xi .$$

E l'equazione per le direzioni assintotiche sarà *):

$$(14)\qquad \begin{aligned} & P_{11} dx_1^2 + P_{22} dx_2^2 + P_{33} dx_3^2 + \\ & 2P_{23} dx_2 dx_3 + 2P_{31} dx_3 dx_1 + 2P_{12} dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

L'integrale generale di quest'equazione differenziale rappresenterà adunque il sistema delle *curve assintotiche* (*Curven der Haupttangenten*) della superficie S; e l'equazione $\Xi=0$ (o un fattore di essa) darà la *curva parabolica*, la quale è eziandio situata sulla superficie Hessiana della data.

Le direzioni di due altre rette tangenti ad S nel punto (ξ, η, ζ) siano date dall'equazione differenziale

$$(15)\qquad \begin{aligned} & A_{11} dx_1^2 + A_{22} dx_2^2 + A_{33} dx_3^2 + \\ & + 2A_{23} dx_2 dx_3 + 2A_{31} dx_3 dx_1 + 2A_{12} dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Le condizioni perchè questa quadratica si spezzi in due fattori corrispondenti a due rette incrociate nel punto (x_1, x_2, x_3) sono:

$$(16)\qquad \begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 &= 0 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 &= 0 \\ A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 &= 0, \end{aligned}$$

dalle quali

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Combinando queste relazioni colle (6), si hanno le seguenti

$$(18)\qquad \begin{aligned} & (E_{22} A_{33} + E_{33} A_{22} - 2E_{23} A_{23}) : x_1^2 = \\ & (E_{33} A_{11} + E_{11} A_{33} - 2E_{31} A_{31}) : x_2^2 = \\ & (E_{11} A_{22} + E_{22} A_{11} - 2E_{12} A_{12}) : x_3^2 = \\ & (E_{12} A_{13} + E_{13} A_{12} - E_{11} A_{23} - E_{23} A_{11}) : x_2 x_3 = \\ & (E_{23} A_{21} + E_{21} A_{23} - E_{22} A_{31} - E_{31} A_{22}) : x_3 x_1 = \\ & (E_{31} A_{32} + E_{32} A_{31} - E_{33} A_{12} - E_{12} A_{33}) : x_1 x_2 \end{aligned}$$

*) Clebsch, *Ueber die Steinersche Fläche* (G. di Crelle-Borchardt, t. 67).

e così pure, combinando nella stessa maniera le (16) colle (11), si otterranno altre relazioni affatto analoghe, che si ricavano dalle (18) ponendovi P_{rs} in luogo di E_{rs}.

È superfluo notare che anche fra le E, P hanno luogo relazioni analoghe, le quali si desumono dalle (18) ponendovi P_{rs} in luogo di A_{rs}.

Se le direzioni (15) sono coniugate armonicamente rispetto alle (5), si avranno le equazioni

$$
\begin{aligned}
&E_{22}A_{33}+E_{33}A_{22}-2E_{23}A_{23}=0\\
&E_{33}A_{11}+E_{11}A_{33}-2E_{31}A_{31}=0\\
&E_{11}A_{22}+E_{22}A_{11}-2E_{12}A_{12}=0\\
&E_{12}A_{13}+E_{13}A_{12}-E_{11}A_{23}-E_{23}A_{11}=0\\
&E_{23}A_{21}+E_{21}A_{23}-E_{22}A_{31}-E_{31}A_{22}=0\\
&E_{31}A_{32}+E_{32}A_{31}-E_{33}A_{12}-E_{12}A_{33}=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

una qualunque delle quali ha, in virtù delle (18), per conseguenza le rimanenti.

Analogamente, se le direzioni (14), (15) formano un gruppo armonico, si avranno le:

$$
\begin{aligned}
&P_{22}A_{33}+P_{33}A_{22}-2P_{23}A_{23}=0\\
&P_{33}A_{11}+P_{11}A_{33}-2P_{31}A_{31}=0\\
&P_{11}A_{22}+P_{22}A_{11}-2P_{12}A_{12}=0\\
&P_{12}A_{13}+P_{13}A_{12}-P_{11}A_{23}-P_{23}A_{11}=0\\
&P_{23}A_{21}+P_{21}A_{23}-P_{22}A_{31}-P_{31}A_{22}=0\\
&P_{31}A_{32}+P_{32}A_{31}-P_{33}A_{12}-P_{12}A_{33}=0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Dalle (19), (20) si desume immediatamente

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=\frac{P_{11}E_{31}-P_{31}E_{11}}{x_2}=\frac{P_{12}E_{11}-P_{11}E_{12}}{x_3}\\
&A_{22}=\frac{P_{22}E_{12}-P_{12}E_{22}}{x_3}=\frac{P_{23}E_{22}-P_{22}E_{23}}{x_1}\\
&A_{33}=\frac{P_{33}E_{23}-P_{23}E_{33}}{x_1}=\frac{P_{31}E_{33}-P_{33}E_{31}}{x_2}\\
&2A_{23}=\frac{P_{33}E_{22}-P_{22}E_{33}}{x_1}\\
&2A_{31}=\frac{P_{11}E_{33}-P_{33}E_{11}}{x_2}\\
&2A_{12}=\frac{P_{22}E_{11}-P_{11}E_{22}}{x_3}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Adottando questi valori per le A, la (15) sarà l'equazione differenziale delle linee di curvatura della superficie S.

Si considerino ora le due rette che sono *ordinatamente* coniugate alle (5) rispetto alle (14), e per esse siano

$$(22)\qquad Q_{11}dx_1^2+Q_{22}dx_2^2+Q_{33}dx_3^2+2Q_{23}dx_2dx_3+2Q_{31}dx_3dx_1+2Q_{12}dx_1dx_2=0,$$

$$(23)\qquad \begin{aligned} Q_{11}x_1+Q_{12}x_2+Q_{13}x_3&=0\\ Q_{21}x_1+Q_{22}x_2+Q_{23}x_3&=0\\ Q_{31}x_1+Q_{32}x_2+Q_{33}x_3&=0, \end{aligned}$$

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23}\\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{vmatrix}=0$$

le equazioni analoghe alle (15), (16), (17). Per le Q si ottengono facilmente le espressioni che seguono

$$(25)\qquad \begin{aligned}
Q_{11}&=\frac{E_{11}P_{12}^2+E_{22}P_{11}^2-2E_{12}P_{11}P_{12}}{x_3^2}=\\
&\quad\frac{E_{11}P_{13}^2+E_{33}P_{11}^2-2E_{13}P_{11}P_{13}}{x_2^2},\\
Q_{22}&=\frac{E_{22}P_{23}^2+E_{33}P_{22}^2-2E_{23}P_{22}P_{23}}{x_1^2}=\\
&\quad\frac{E_{22}P_{21}^2+E_{11}P_{22}^2-2E_{21}P_{22}P_{21}}{x_3^2},\\
Q_{33}&=\frac{E_{33}P_{31}^2+E_{11}P_{33}^2-2E_{31}P_{33}P_{31}}{x_2^2}=\\
&\quad\frac{E_{33}P_{32}^2+E_{22}P_{33}^2-2E_{32}P_{33}P_{32}}{x_1^2},\\
Q_{23}&=\frac{E_{22}P_{23}P_{33}+E_{33}P_{23}P_{22}-E_{23}P_{23}^2-E_{23}P_{22}P_{33}}{x_1^2},\\
Q_{31}&=\frac{E_{33}P_{31}P_{11}+E_{11}P_{31}P_{33}-E_{31}P_{31}^2-E_{31}P_{33}P_{11}}{x_2^2},\\
Q_{12}&=\frac{E_{11}P_{12}P_{22}+E_{22}P_{12}P_{11}-E_{12}P_{12}^2-E_{12}P_{11}P_{22}}{x_3^2},
\end{aligned}$$

epperò, viste le (8), (13):

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & l_1 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & l_2 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix} = (l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3)^2\Theta\,\Xi^2\,.$$

L'equazione (22) è subito integrata, ed invero il suo integrale è algebrico *). Infatti il completo sistema delle rette analoghe alle (5) costituisce i coni circoscritti ad S ed aventi i loro vertici in punti del circolo imaginario all'infinito; dunque le rette (22) sono le tangenti delle curve di contatto fra questi coni e la superficie S, vale a dire: l'integrale completo della (22) rappresenterà il sistema delle curve secondo le quali S è segata dalle sue prime polari, i cui poli siano i punti del circolo imaginario all'infinito.

In virtù delle (1) la prima polare di un punto (ξ_0, η_0, ζ_0), situato all'infinito, è

$$\xi_0\frac{\partial S}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial S}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial S}{\partial c}=0.$$

Ma dalle identità

$$\frac{\partial S}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_1}+\frac{\partial S}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_1}+\frac{\partial S}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1}+\frac{\partial S}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_2}+\frac{\partial S}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_2}+\frac{\partial S}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_2}+\frac{\partial S}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_3}+\frac{\partial S}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_3}+\frac{\partial S}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_3}+\frac{\partial S}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial x_3}=0$$

si ricava

$$\frac{\partial S}{\partial a}:\frac{\partial S}{\partial b}:\frac{\partial S}{\partial c}=J_a:J_b:J_c\,,$$

dove

$$(27)\qquad \begin{aligned} J_a&=\Sigma\pm\frac{\partial b}{\partial x_1}\frac{\partial c}{\partial x_2}\frac{\partial e}{\partial x_3}\\ J_b&=\Sigma\pm\frac{\partial c}{\partial x_1}\frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial e}{\partial x_3}\\ J_c&=\Sigma\pm\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial b}{\partial x_2}\frac{\partial e}{\partial x_3}\end{aligned}$$

sono ordinatamente le Jacobiane delle terne di curve (b, c, e), (c, a, e), (a, b, e). Dunque l'integrale completo della (22) è

*) Sotto l'unica condizione che S sia una superficie algebrica.

$$\xi_0 J_a + \eta_0 J_b + \zeta_0 J_c = 0, \tag{28}$$

dove le costanti $\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$ sono legate dalla condizione

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 + 2\alpha\eta_0\zeta_0 + 2\beta\zeta_0\xi_0 + 2\gamma\xi_0\eta_0 = 0 \tag{29}$$

esprimente che il punto (ξ_0, η_0, ζ_0) è situato nel circolo imaginario all'infinito.

E l'integrale singolare della stessa (22) sarà

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma & \beta & J_a \\ \gamma & 1 & \alpha & J_b \\ \beta & \alpha & 1 & J_c \\ J_a & J_b & J_c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} & J_a^2(1-\alpha^2) + J_b^2(1-\beta^2) + J_c^2(1-\gamma^2) + \\ & + 2J_bJ_c(\beta\gamma-\alpha) + 2J_cJ_a(\gamma\alpha-\beta) + 2J_aJ_b(\alpha\beta-\gamma) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Ma d'altra parte è manifesto che l'integrale singolare della (22) deve dare la curva luogo dei punti ne' quali S sia toccata da piani che siano tangenti al circolo imaginario all'infinito. Dunque la (30) è l'imagine (sul piano delle x) della curva comune ad S ed alla superficie *) luogo dei poli (relativi ad S) dei piani tangenti al circolo imaginario all'infinito.

Differenziando la (28) si ha

$$\xi_0 dJ_a + \eta_0 dJ_b + \zeta_0 dJ_c = 0,$$

da questa e dalla stessa (28) si ricavino i rapporti $\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$ e si sostituiscano nella (29). Si otterrà così l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} & (J_b dJ_c - J_c dJ_b)^2 + (J_c dJ_a - J_a dJ_c)^2 + (J_a dJ_b - J_b dJ_a)^2 + \\ & + 2\alpha(J_c dJ_a - J_a dJ_c)(J_a dJ_b - J_b dJ_a) \\ & + 2\beta(J_a dJ_b - J_b dJ_a)(J_b dJ_c - J_c dJ_b) \\ & + 2\gamma(J_b dJ_c - J_c dJ_b)(J_c dJ_a - J_a dJ_c) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

la quale dovrà coincidere colla (22).

Ora, astrazion fatta da un fattore numerico, J è uguale a $x_1\dfrac{\partial J}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial J}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial J}{\partial x_3}$, e dJ è uguale a $dx_1\dfrac{\partial J}{\partial x_1} + dx_2\dfrac{\partial J}{\partial x_2} + dx_3\dfrac{\partial J}{\partial x_3}$; dunque, indicati con

*) D'ordine $2(n-1)$, se S è d'ordine n.

$$\begin{matrix} H_{a1}, & H_{a2}, & H_{a3} \\ H_{b1}, & H_{b2}, & H_{b3} \\ H_{c1}, & H_{c2}, & H_{c3} \end{matrix}$$

i determinanti minori corrispondenti agli elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial J_a}{\partial x_1} & \frac{\partial J_a}{\partial x_2} & \frac{\partial J_a}{\partial x_3} \\ \frac{\partial J_b}{\partial x_1} & \frac{\partial J_b}{\partial x_2} & \frac{\partial J_b}{\partial x_3} \\ \frac{\partial J_c}{\partial x_1} & \frac{\partial J_c}{\partial x_2} & \frac{\partial J_c}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

si avrà

$$\begin{aligned} J_b dJ_c - J_c dJ_b &= H_{a1}(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \\ &\quad + H_{a2}(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + H_{a3}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \\ J_c dJ_a - J_a dJ_c &= H_{b1}(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \\ &\quad + H_{b2}(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + H_{b3}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \\ J_a dJ_b - J_b dJ_a &= H_{c1}(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \\ &\quad + H_{c2}(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + H_{c3}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \end{aligned}$$

e sostituendo nella (31) ne verrà un'equazione che paragonata colla (22) somministra

$$(32) \qquad \begin{aligned} Q_{11} &\equiv x_3^2 G_{22} + x_2^2 G_{33} - 2 x_2 x_3 G_{23} \\ Q_{22} &\equiv x_1^2 G_{33} + x_3^2 G_{11} - 2 x_3 x_1 G_{31} \\ Q_{33} &\equiv x_2^2 G_{11} + x_1^2 G_{22} - 2 x_1 x_2 G_{12} \\ Q_{23} &\equiv - x_1^2 G_{23} + x_1 x_2 G_{13} + x_1 x_3 G_{12} - x_2 x_3 G_{11} \\ Q_{31} &\equiv - x_2^2 G_{31} + x_2 x_3 G_{21} + x_2 x_1 G_{23} - x_3 x_1 G_{22} \\ Q_{12} &\equiv - x_3^2 G_{12} + x_3 x_1 G_{32} + x_3 x_2 G_{31} - x_1 x_2 G_{33} \end{aligned}$$

dove per brevità si è posto

$$(33) \qquad \begin{aligned} G_{rs} = {} & H_{ar} H_{as} + H_{br} H_{bs} + H_{cr} H_{cs} + \\ & + \alpha(H_{br} H_{cs} + H_{bs} H_{cr}) + \beta(H_{cr} H_{as} + H_{cs} H_{ar}) + \gamma(H_{ar} H_{bs} + H_{as} H_{br}). \end{aligned}$$

Formando colle Q date dalle (32) le equazioni analoghe alle (8) e paragonandole colle (26), posto

e facendo $l = x$,

$$\Theta = \nu^2 e^2 \Upsilon,$$

ove

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & e_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & e_2 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & \beta & J_a \\ \gamma & 1 & \alpha & J_b \\ \beta & \alpha & 1 & J_c \\ J_a & J_b & J_c & 0 \end{vmatrix}.$$

Le curve (28), costituenti l'integrale generale della (22), fanno parte di una rete: una curva qualunque di questa rete essendo l'imagine della curva di intersezione fra la superficie data e la prima polare di un punto del piano all'infinito. Le curve di questa rete sono dell'ordine $3(n-1)$, ed hanno per Jacobiana il sistema formato dalle due curve $e = 0$, $\Xi = 0$. Infatti, è chiaro che la Jacobiana in questione è l'imagine del luogo di un punto in cui la superficie data sia toccata da una prima polare avente il polo all'infinito. Questa proprietà è posseduta dai punti della sezione all'infinito (il che è evidente), e dai punti della curva parabolica: perchè un punto m di questa curva è doppio per la prima polare di un punto m'; le prime polari dei punti della retta mm' si toccano adunque tutte in m, e siccome la prima polare di m tocca in m la superficie data, così qualunque punto della retta mm', epperò anche il suo punto all'infinito, è polo di una prima polare toccante in m la superficie data.

Dunque

$$\Sigma \pm \frac{\partial J_a}{\partial x_1} \frac{\partial J_b}{\partial x_2} \frac{\partial J_c}{\partial x_3} = e\,\Xi.$$

È assai facile di riconoscere in una superficie qualsivoglia due particolari linee di curvatura: l'una delle quali è la sezione fatta nella superficie dal piano all'infinito; l'altra è la curva di contatto fra la superficie data e la sviluppabile circoscritta simultaneamente ad essa e al circolo imaginario all'infinito. La prima di queste curve è una linea di curvatura perchè lungo essa tutte le normali della superficie giacciono in un medesimo piano (il piano all'infinito). La seconda curva è pure una linea di curvatura, perchè, lungo essa, le normali della superficie data sono generatrici della sviluppabile sopra menzionata *):

*) Infatti, un piano e una retta diconsi perpendicolari fra loro, se sono conjugati rispetto al circolo imaginario all'infinito: cioè se la traccia (all'infinito) del piano è la polare della traccia della retta, rispetto al detto circolo. Di qui segue che, se il piano è tangente al circolo, la retta passa pel punto di contatto; dunque, se un piano tocca in un punto una superficie e in un altro punto il circolo imaginario all' infinito, la normale alla superficie nel primo punto è la retta che unisce i due punti di contatto.

giacchè questa sviluppabile è simultaneamente tangente e normale (lungo una medesima curva) alla superficie data.

Queste due curve sono algebriche se la superficie è algebrica; dunque ogni *superficie algebrica ha almeno due linee di curvatura algebriche* *).

Per la nostra superficie S, che si è supposta inoltre rappresentabile sopra un piano, l'imagine della prima delle due curve anzidette è

$$e = 0 \tag{36}$$

e l'imagine dell'altra è rappresentata dalla (30). Dunque le (36), (30) sono due soluzioni particolari dell'equazione differenziale (15).

Le formole superiori sono state stabilite in vista di future applicazioni, che si riserbano ad altra occasione. Per ora ci limiteremo a considerare l'esempio semplicissimo delle superficie di 2.° ordine.

È evidente che, se un piano sega una superficie sotto un angolo costante, la sezione sarà una linea di curvatura: infatti, lungo essa, le normali della superficie data formeranno una superficie sviluppabile. Se la superficie data è di 2.° ordine, la proprietà di cui si tratta è posseduta dai piani polari dei tre punti all'infinito che formano il triangolo coniugato simultaneamente alla superficie ed al circolo imaginario; infatti, ciascuno di questi punti è vertice di un cilindro circoscritto, le cui generatrici sono perpendicolari al piano della curva di contatto, epperò le normali alla superficie lungo questa curva sono tutte contenute nel piano medesimo. Per tal modo, conosciamo già *cinque* linee di curvatura della superficie: vale a dire, le sezioni fatte dai tre piani principali; la sezione all'infinito; e la curva di contatto colla sviluppabile simultaneamente circoscritta alla superficie ed al circolo imaginario, ossia la curva comune alla superficie data ed al cono (concentrico ad essa) che, rispetto alla medesima, è polare reciproco del circolo imaginario all'infinito.

Dando all'equazione della superficie la forma

$$S \equiv s\,\xi\,\eta + r\,\zeta^2 - \zeta = 0$$

i suoi piani principali saranno

$$\xi + \eta = 0, \quad \xi - \eta = 0, \quad 2\,r\,\zeta - 1 = 0.$$

Le formole per la rappresentazione sul piano delle x possono essere le seguenti:

$$\xi = \frac{x_2 x_3}{r\,x_1 x_2 + s\,x_3^2}$$

*) Dalla definizione di queste due curve risulta chiaro che i punti ad esse comuni sono quelli in cui la prima di esse è toccata dalle tangenti comuni al circolo imaginario all'infinito.

$$\eta = \frac{x_3 x_1}{r x_1 x_2 + s x_3^2}$$

$$\zeta = \frac{x_1 x_2}{r x_1 x_2 + s x_3^2}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= x_2 x_3 \\ b &= x_3 x_1 \\ c &= x_1 x_2 \\ e &= r x_1 x_2 + s x_3^2. \end{aligned}$$

In questa rappresentazione, le rette passanti pel punto $x_1 = x_3 = 0$ e quelle passanti pel punto $x_2 = x_3 = 0$ sono le imagini delle generatrici rettilinee; e le coniche passanti pei due punti suddetti sono le imagini delle sezioni piane.

Siccome il piano $\zeta = 0$ è perpendicolare alla retta $\xi = \eta = 0$, così $\alpha = \beta = 0$; e il cono che dall'origine degli assi projetta il circolo imaginario all'infinito sarà

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\gamma\xi\eta = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} & E_{11} : r^2 x_2^4 + s(s - 2\gamma r) x_2^2 x_3^2 + s^2 x_3^4 \\ 1) \qquad & = E_{22} : r^2 x_1^4 + s(s - 2\gamma r) x_1^2 x_3^2 + s^2 x_3^4 \\ & = E_{12} : \gamma r^2 x_1^2 x_2^2 - rs(x_1^2 + x_2^2) x_3^2 + s^2 x_1 x_2 x_3^2 + \gamma s^2 x_3^4, \end{aligned}$$

$$P_{11} = 0, \qquad P_{22} = 0,$$

$$Q_{11} : Q_{22} : Q_{12} = E_{11} : E_{22} : -E_{12},$$

$$A_{11} : A_{22} = E_{11} : -E_{22}, \quad A_{12} = 0.$$

Ne segue che l'equazione differenziale (22), posto $dx_3 = 0$, com'è evidentemente lecito, diviene pel caso attuale

2) $$E_{11}\,dx_1^2 - 2\,E_{12}\,dx_1\,dx_2 + E_{22}\,dx_2^2 = 0,$$

la (15) diviene

3) $$E_{11}\,dx_1^2 - E_{22}\,dx_2^2 = 0$$

e la (14) si riduce alla semplicissima

$$dx_1\,dx_2 = 0.$$

Quest'ultima, il cui integrale completo è

$$x_1 = \omega\,x_3, \quad x_2 = \omega'\,x_3$$

(ω, ω' costanti arbitrarie), dice che le curve assintotiche altro non sono che le generatrici rettilinee della superficie.

La 2) ha, in virtù di ciò che si è dimostrato in generale, l'integrale completo

$$s\,\xi_0\,x_1\,x_3 + s\,\eta_0\,x_2\,x_3 + \zeta_0\,(r\,x_1\,x_2 - s\,x_3^2) = 0$$

ove le ζ_0, η_0, ζ_0 sono costanti legate dalla relazione

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 + 2\,\gamma\,\xi_0\,\eta_0 = 0,$$

cioè l'integrale completo è costituito dal sistema di coniche comuni alla superficie data ed ai piani tangenti del cono polare reciproco del circolo imaginario all'infinito.

L'integrale singolare della stessa 2) sarà l'intersezione della superficie data con questo cono, cioè la curva gobba di 4.° ordine la cui imagine è

4) $$s^2(x_1^2 + x_2^2 - 2\gamma x_1\,x_2)\,x_3^2 + (1-\gamma^2)\,(r x_1\,x_2 - s x_3^2)^2 = 0$$

e questa medesima curva sarà anche una linea di curvatura.

Se le linee di curvatura sono tutte algebriche, l'equazione generale delle loro imagini, ossia l'integrale completo della 3), sarà della forma

5) $$\omega^2\,\mathrm{L} + 2\,\omega\,\mathrm{M} + \mathrm{N} = 0$$

dove ω è un parametro variabile da curva a curva; L, M, N sono tre funzioni algebriche intere, omogenee in $x_1\,x_2\,x_3$; e propriamente $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ saranno le imagini di due linee di curvatura, ed $\mathrm{M} = 0$ un'altra curva *) determinante insieme con $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$ la rete geometrica alla quale apparterranno le imagini di tutte le altre linee di curvatura. È chiaro che tutte le curve del sistema 5) saranno note quando siano date cinque **) fra esse appunto come sono note tutte le tangenti di una conica, quando ne sono date cinque.

Siccome l'integrale singolare

$$\mathrm{L\,N} - \mathrm{M}^2 = 0$$

dev'essere, per la teoria generale, una curva dell'8.° ordine, così le curve del sistema 5) saranno del 4.° Tale è appunto la curva 4); invece le sezioni fatte nella superficie dai piani principali e dal piano all'infinito sono coniche, le cui imagini sono le curve

$$(x_1 + x_2)\,x_3 = 0$$
$$(x_1 - x_2)\,x_3 = 0$$
$$r x_1 x_2 - s\,x_3^2 = 0$$
$$r x_1 x_2 + s\,x_3^2 = 0$$

tutte di 2.° ordine: così che queste per essere considerate quali curve del 4.° dovranno essere prese due volte.

---

*) Imagine di quella curva (non di curvatura) che passa pei punti ove le due linee di curvatura anzidette segano la curva dell'integrale singolare.

**) Le quali devono essere curve dello stesso ordine e appartenenti ad una stessa rete.

Abbiamo dunque cinque linee di curvatura, le cui imagini sono:

$$X \equiv (x_1 + x_2)^2 x_3^2 = 0$$
$$Y \equiv (x_1 - x_2)^2 x_3^2 = 0$$
$$Z \equiv (r\, x_1 x_2 - s\, x_3^2)^2 = 0$$
$$T \equiv (r\, x_1 x_2 + s\, x_3^2)^2 = 0$$
$$U \equiv s^2 (x_1^2 + x_2^2 - 2\gamma x_1 x_2) x_3^2 + (1 - \gamma^2)(r\, x_1 x_2 - s\, x_3^2)^2 = 0.$$

Queste curve appartengono tutte ad una medesima rete; infatti si ha identicamente

$$T = rs(X - Y) + Z,$$
$$2U = s^2 (1 - \gamma) X + s^2 (1 + \gamma) Y + 2(1 - \gamma^2) Z.$$

Ora, in luogo della 5), potremo scrivere

6) $$\omega^2 X + 2\omega(lX + mY + nZ) + Y = 0$$

ove l, m, n sono costanti da determinarsi in modo che, dando inoltre ad ω valori opportuni, l'equazione precedente possa identificarsi con ciascuna delle seguenti

$$Z = 0, \qquad T = 0, \qquad U = 0.$$

Identificando la 6) con $Z = 0$, si trova

$$\omega = -2l, \qquad 4lm = 1.$$

La 6) coincide con $T = 0$ se (oltre a $4lm = 1$) si faccia

$$\omega = -2m, \qquad m - l + nrs = 0.$$

E per ultimo la coincidenza della 6) con $U = 0$ richiede inoltre

$$2m(1 - \gamma) + 2l(1 + \gamma) - ns^2 = 0$$

e corrisponde ad

$$\omega = \frac{2m(1 - \gamma)}{1 + \gamma}.$$

Riunendo, abbiamo pertanto che, fatto

$$4l^2 = \frac{s + 2r(1 - \gamma)}{s - 2r(1 + \gamma)}$$

$$4m^2 = \frac{s - 2r(1 + \gamma)}{s + 2r(1 - \gamma)}$$

$$n = \frac{2}{s\sqrt{(s - 2r(1 + \gamma))(s + 2r(1 - \gamma))}}$$

la 6) si riduce

$$\begin{array}{lll} \text{a } Z=0 & \text{per} & \omega=-2l, \\ \text{a } T=0 & \text{per} & \omega=-2m, \\ \text{ad } U=0 & \text{per} & \omega=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\sqrt{\frac{s-2r(1+\gamma)}{s+2r(1-\gamma)}}. \end{array}$$

Dunque la 6) diviene

$$\omega^2 X+\omega\left(X\sqrt{\frac{s+2r(1-\gamma)}{s-2r(1+\gamma)}}+Y\sqrt{\frac{s-2r(1+\gamma)}{s+2r(1-\gamma)}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{s\sqrt{s-2r(1+\gamma)}\sqrt{s+2r(1-\gamma)}}Z\right)+Y=0$$

ossia, cambiando ω in $-\omega\sqrt{\frac{s+2r(1-\gamma)}{s-2r(1+\gamma)}}$,

7) $$\omega^2 X'-\omega(X'+Y'+Z')+Y'=0$$

dove

$$\begin{aligned} X' &= s\left(s+2r(1-\gamma)\right)(x_1+x_2)^2 x_3^2 \\ Y' &= s\left(s-2r(1+\gamma)\right)(x_1-x_2)^2 x_3^2 \\ Z' &= 4(r x_1 x_2 - s x_3^2)^2. \end{aligned}$$

L'equazione 7) rappresenta una serie di curve di 4.° ordine, aventi tutte gli stessi due punti doppi $x_1=x_3=0$, $x_2=x_3=0$. Inoltre queste curve hanno otto tangenti comuni, delle quali quattro concorrono nel primo punto doppio, e le altre nel secondo. Infatti, formando i due discriminanti della 7), considerata prima come una forma di 2.° grado in $\frac{x_2}{x_3}$, e poi come una forma di 2.° grado in $\frac{x_1}{x_3}$, si hanno le equazioni dei due gruppi di quattro tangenti

8) $$\begin{aligned} r^2 x_1^4+s(s-2\gamma r)x_1^2 x_3^2+s^2 x_3^4=0 \\ r^2 x_2^4+s(s-2\gamma r)x_2^2 x_3^2+s^2 x_3^4=0 \end{aligned}$$

ossia, per le 1),

$$E_{22}=0, \qquad E_{11}=0$$

equazioni indipendenti dal parametro ω. Siccome i due discriminanti sono proporzionali alle funzioni E_{22}, E_{11}, dalle quali non differiscono che per un fattore costante, così *) la 7) è l'integrale completo dell'equazione differenziale

*) JACOBI a pag. 1 del tom. 58 del Giornale CRELLE-BORCHARDT.

$$dx_1\sqrt{E_{11}} \pm dx_2\sqrt{E_{22}} = 0,$$

cioè della 3). L'integrale singolare è

$$E_{11}\,E_{22} = 0$$

che rappresenta il sistema delle otto tangenti.

Le curve 7) sono adunque le imagini delle linee di curvatura della superficie data; queste linee sono tutte tangenti ad otto rette che sono le generatrici della superficie uscenti dai quattro punti che questa ha comuni col circolo imaginario all'infinito *). Oltre a questi, le otto generatrici si segano in altri dodici punti: i punti di contatto dei dodici piani tangenti della superficie data che passano per le corde comuni a questa ed al circolo imaginario all'infinito, vale a dire, i dodici ombelici della superficie. Questi sono adunque allineati a tre a tre sulle otto generatrici **).

Nella rappresentazione, i due gruppi di quattro rette $E_{11} = 0$, $E_{22} = 0$ hanno lo stesso rapporto anarmonico; perciò esse rette si segheranno in sedici punti, situati a quattro a quattro in quattro coniche passanti per $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ ***). I sedici punti sono le imagini dei dodici ombelici e dei quattro punti circolari all'infinito; e le quattro coniche sono le imagini delle sezioni fatte nella superficie dai tre piani principali e dal piano all'infinito.

Milano, 3 maggio 1870.

---

*) Sono otto rette situate contemporaneamente nella sviluppabile che è circoscritta alla superficie data e al circolo imaginario all'infinito.

**) HAMILTON, *Elements of quaternions*, p. 661.

***) *Introd. ad una teoria geom. delle curve piane* [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)], **149**, e.