

SULLE TRASFORMAZIONI RAZIONALI NELLO SPAZIO *).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo V (1871), pp. 131-162.

Generalità.

1. Quattro variabili omogenee indipendenti $x_1 x_2 x_3 x_4$ siano legate ad altre quattro variabili analoghe $y_1 y_2 y_3 y_4$ mediante le relazioni:

$$(1) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

dove le φ siano funzioni (algebriche razionali) intere omogenee di uno stesso grado ν delle y .

Considerando le x e le y come coordinate di due punti corrispondenti in due spazi a tre dimensioni, le (1) esprimono che ad un punto qualsivoglia dello spazio (y), purchè non comune alle quattro superficie $\varphi=0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (x), e che ai piani

$$(2) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

dello spazio (x) corrispondono le superficie d'ordine ν

$$(3) \quad \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito.

Suppongasi ora che dalle (1) si possano desumere le y espresse razionalmente colle x , cioè le formole inverse delle (1) siano

*) I risultati esposti in questa Memoria furono comunicati al R. Istituto Lombardo nelle sedute 4 maggio e 1.º giugno 1871 [Queste Opere, n. 91, 92]; e in parte anche alla Società delle Scienze di Gottinga (Nachrichten 1871, n.º 5; e Mathematische Annalen, t. 4, p. 213) [Queste Opere, n. 93]. Contemporaneamente usciva alla luce l'interessante Memoria del sig. NOETHER, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen* (Math. Annalen, t. 3, p. 547).

$$(4) \quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \phi_1 : \phi_2 : \phi_3 : \phi_4$$

essendo le ϕ funzioni intere omogenee delle x , di un medesimo grado μ .

Ciò equivale a supporre il sistema (3) tale, che tre superficie prese arbitrariamente da esso abbiano un unico punto comune, il quale non appartenga a tutte le superficie del sistema medesimo: così che anche ad un punto qualunque dello spazio (x), purchè non comune a tutte le superficie $\phi = 0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (y). Dalle (4) segue inoltre che ai piani

$$(5) \quad \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \beta_4 y_4 = 0$$

dello spazio (y) corrispondono le superficie d'ordine μ

$$(6) \quad \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 + \beta_3 \phi_3 + \beta_4 \phi_4 = 0$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito; tre qualunque delle quali, in virtù delle (1), si segano in un solo punto non comune a tutto il sistema. Le (1), (4) significano eziandio che ciascuna superficie dei sistemi (3) e (6) è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

2. Per brevità di discorso diremo *omaloidi* *) una superficie quando sia dotata della proprietà di poter essere rappresentata punto per punto sopra un piano; e *omaloidico* un sistema di superficie algebriche, il quale, come i sistemi (3) e (6), soddisfaccia alle due condizioni: 1.º d'essere lineare e triplamente infinito; 2.º che tre superficie prese ad arbitrio nel sistema si seghino in un solo punto non comune a tutto il sistema medesimo. Le superficie di un sistema omaloidico sono necessariamente omaloidi.

Queste denominazioni possono valere anche per le figure piane (e per le figure descritte in una superficie omaloide), così che una curva omaloide sarà una curva razionale, ed una rete omaloidica di curve sarà un sistema lineare doppiamente infinito di curve (razionali), due qualunque delle quali si seghino in un solo punto non comune a tutte.

3. Dato in uno spazio (y) un sistema omaloidico (3), possiamo porre le formole (1) cioè stabilire una corrispondenza univoca fra le superficie (3) ed i piani d'un altro spazio (x); e quindi dedurne le (4). Così viene ad essere individuato nello spazio (x) un nuovo sistema omaloidico (6) che possiamo chiamare l'*inverso* del dato. I due sistemi omaloidici servono di base a due trasformazioni inverse, razionali entrambe, che hanno luogo senza presupporre le variabili (di ciascuno spazio) legate da alcuna relazione.

Basta adunque che sia dato un sistema omaloidico, perchè risultino determinati il si-

*) Cfr. SYLVESTER nel Cambridge and Dublin Math. Journal, t. 6, p. 12. Le superficie omaloidi, come le curve razionali (di genere $p = 0$), sono dette *unicursal* dal sig. CAYLEY.

stema inverso e le due trasformazioni razionali inverse, per mezzo delle quali si passa dall'uno spazio all'altro e viceversa.

In altre parole, la ricerca delle trasformazioni razionali nello spazio (come nel piano) è ridotta a quella dei sistemi omaloidici.

4. Diremo *fondamentali* *) o *principali* **) i punti e le linee comuni a tutte le superficie d'un sistema omaloidico. Due superficie qualsivogliono

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0 \\ \alpha'_1 \varphi_1 + \alpha'_2 \varphi_2 + \alpha'_3 \varphi_3 + \alpha'_4 \varphi_4 = 0 \end{cases}$$

del sistema (3) avranno, oltre alle curve fondamentali, una curva comune R, la quale, dovendo corrispondere punto per punto alla retta intersezione dei piani

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 + \alpha'_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

è necessariamente una curva razionale. E siccome la retta (8) incontra in μ punti una superficie qualunque del sistema (6), così la curva R definita dalle (7) avrà μ punti comuni con un piano qualsivoglia (5) dello spazio (y); dunque:

Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe razionali d'ordine μ , una qualunque delle quali sarà determinata da quattro condizioni.

Ed analogamente:

Alle rette dello spazio (y) corrisponde un sistema quadruplamente infinito di curve gobbe razionali d'ordine ν .

Indicheremo con S una qualunque di queste curve, comune a due superficie del sistema (6).

5. Nello spazio (x) una retta ed un piano hanno un solo punto comune, se la prima non giace nel secondo; dunque:

*Una curva R incontra una superficie φ ***), sulla quale non giaccia per intero, in un solo punto non comune a tutte le φ ; ossia:*

Delle $\nu\mu$ intersezioni di una curva R con una superficie φ ve ne sono $\nu\mu - 1$ situate nei punti e nelle curve fondamentali del sistema (3).

Queste $\nu\mu - 1$ intersezioni tengono poi luogo di $4(\mu - 1)$ condizioni (lineari), fra

*) *Mémoire sur les surfaces du 3^e ordre* (G. CRELLE-BORCHARDT, t. 68) [Queste Opere, n. 79] n.° 114.

**) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Nota 2^a (Mem. Accad. Bologna serie 2^a, t. 5, 1865) [Queste Opere, n. 62 (t. 2^o)].

***) Cioè una superficie del sistema (3).

le 4μ , che in generale determinano una curva razionale d'ordine μ *), giacchè, come si è veduto or ora, le curve R formano un *sistema quadruplamente infinito*.

Analoghe proprietà si possono enunciare per le curve S ; e ciò sia detto una volta per tutte.

6. Considero un piano α_0 nello spazio (x) , al quale corrisponderà una superficie φ_0 del sistema (3) nello spazio (y) . Alle rette in α_0 corrisponderanno le curve R di φ_0 ; e le sezioni piane di φ_0 avranno per immagini in α_0 le curve d'ordine μ d'un sistema lineare, triplamente infinito e tale che due curve qualunque del sistema abbiano ν intersezioni variabili (corrispondenti ai punti in cui φ_0 è incontrata da una retta arbitraria). Perciò, se queste curve hanno m_i punti i -pli fissi ($i = 1, 2, \dots, \mu - 1$), sussisterà la relazione **)

$$\mu^2 - \sum_i i m_i = \nu. \quad [87]$$

A ciascuno dei suddetti punti i -pli (sia I uno qualunque de' medesimi) corrisponderà in φ_0 una curva razionale C_i d'ordine i , e ad una retta G condotta in α_0 arbitrariamente per I corrisponderà un'altra curva razionale $C_{\mu-i}$ d'ordine $\mu - i$ costituente insieme con C_i una curva R ed avente colla C_i medesima un punto comune (punto doppio per la R composta), che è il corrispondente di quello situato in G e infinitamente vicino ad I . Variando G intorno ad I , varia la $C_{\mu-i}$ ed il punto doppio percorre la curva fissa C_i . Ma la curva R composta della C_i e di una $C_{\mu-i}$ può considerarsi come intersezione (non completa) di due superficie φ , epperò il punto comune alle C_i , $C_{\mu-i}$, essendo doppio per la R , sarà un punto di contatto fra le due φ : dunque ogni punto della C_i è un punto di contatto fra due φ , (ossia un punto doppio di una φ). Ora, il luogo dei punti di contatto fra le φ , ossia dei punti doppi delle φ medesime, è la *Jacobiana* del sistema (3): superficie d'ordine $4(\nu - 1)$; dunque la curva C_i , situata su φ_0 e corrispondente al punto I di α_0 , giace eziandio sulla Jacobiana delle φ .

Siccome poi ai piani in (y) corrispondono le superficie ϕ in (x) , così le curve d'ordine μ del sistema lineare sopra accennato non saranno altro che le tracce delle ϕ sul piano α_0 .

*) Che la più generale curva razionale d'ordine μ nello spazio ad r dimensioni, sia determinata da $(r+1)(\mu+1) - 4$ condizioni, risulta dall'osservare ch'essa è definita mediante le equazioni $y_1 : y_2 : \dots : y_{r+1} = f_1 : f_2 : \dots : f_{r+1}$, dove le f sono funzioni intere d'un parametro ω , dello stesso grado μ , e che degli $(r+1)(\mu+1)$ coefficienti arbitrari di queste funzioni

se ne possono eliminare 4 mediante una sostituzione lineare $\omega' = \frac{a + b\omega}{c + d\omega}$.

**) CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Mem. Accad. Bologna, 1863 e 1865) [Queste Opere, n. 40, 62 (t. 2.^o)]; — CAYLEY, *On the rational transformation between two spaces* (Proceedings of the Lond. Math. Society, t. 3); — NOETHER, *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Annalen, t. 3).

e gli m_i punti i -pli (uno dei quali è I) saranno le intersezioni di questo piano con una curva F_{m_i} d'ordine m_i , i -pla per tutte le ϕ . Viceversa, se una curva R si spezza, la sua immagine che è una retta, dovrà passare per un punto I. Dunque:

A ciascun punto di una curva fondamentale dello spazio (x), che sia i-pla per tutte le superficie ϕ , corrisponde una curva razionale d'ordine i, luogo geometrico della quale è una superficie che fa parte della Jacobiana delle φ .

L'ordine di questo luogo sarà uguale al numero delle intersezioni (non fisse) di una curva S qualunque colla predetta curva fondamentale i -pla dello spazio (x). E il genere *) di esso luogo sarà uguale al genere della corrispondente curva fondamentale.

7. Se fra le curve fondamentali dello spazio (x) ve n'è una che le curve S non incontrino in alcun punto {non fisso}, ad essa corrisponderà una superficie d'ordine 0; cioè ad un punto qualunque di quella curva corrisponderà una curva fissa, la quale, dovendo giacere su ciascuna φ , sarà una curva fondamentale dello spazio (y). Se la prima curva è i -pla per le ϕ e d'ordine i' , la seconda curva sarà d'ordine i e multipla secondo i' per le φ . La relazione fra le due curve è reciproca, cioè a ciascun punto della seconda corrisponde tutta la prima curva; e la seconda curva non è incontrata in alcun punto {non fisso} da una curva arbitraria R.

8. Una retta incontra la Jacobiana delle ϕ in $4(\mu - 1)$ punti; dunque una R qualunque incontra in $4(\mu - 1)$ punti l'insieme delle curve (e dei punti) fondamentali dello spazio (y). Ma $4(\mu - 1)$ è appunto il numero delle condizioni lineari comuni alle curve R, giacchè queste costituiscono un sistema quadruplicemente infinito; dunque le curve R sono pienamente determinate dal dover segare in $4(\mu - 1)$ punti le curve (e i punti) fondamentali dello spazio (y).

Quando una curva R si spezza in due C_i , $C_{\mu-i}$, la prima appartiene ad una serie semplicemente infinita, il cui luogo è parte della Jacobiana delle φ ; la seconda invece, corrispondendo ad una retta che passa per un punto I (di una curva fondamentale i -pla in (x)), appartiene ad un sistema triplamente infinito; ossia è soggetta a $4(\mu - i) - 3$ condizioni. Dunque la $C_{\mu-i}$ incontrerà le curve (e i punti) fondamentali dello spazio (y) in $4(\mu - i) - 3$ punti [88]. Questi punti corrisponderanno a quelli in cui la retta corrispondente a $C_{\mu-i}$ sega la Jacobiana delle ϕ , oltre ad I. Dunque, detto κ_i il grado di molteplicità col quale la Jacobiana delle ϕ passa per la curva fondamentale i -pla dello spazio (x), avremo

$$4(\mu - i) - 3 = 4(\mu - 1) - \kappa_i$$

donde

$$\kappa_i = 4i - 1$$

*) NOETHER nelle Nachrichten di Gottinga, 14 luglio 1869.

ossia

*Una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le ϕ e segata dalle curve S [in punti variabili], è multipla secondo $4i - 1$ per la Jacobiana delle ϕ *).*

La curva C_i , appartenendo ad una serie semplicemente infinita, è soggetta a $4i - 1$ condizioni lineari, cioè sega in $4i - 1$ punti le curve fondamentali dello spazio (y); ciò che s'accorda coll'essere I un punto $(4i - 1)$ -plo per la Jacobiana delle ϕ .

9. Però, se la curva fondamentale i-pla per le ϕ è tale che le curve S non la seghino [in punti non fissi], nel qual caso (n.º 7) a tutt'i suoi punti corrisponde una curva fissa C_i , fondamentale nello spazio (y), le curve $C_{\mu-i}$ che con C_i formano una curva R appartengono ad un sistema triplamente infinito (giacchè esse corrispondono alle rette seganti in un punto non dato la curva i-pla per le ϕ), epperò sono soggette a $4(\mu - i) - 3$ condizioni. Una di queste consiste nel dover segare C_i ; le altre $4(\mu - i) - 4$ consisteranno in altrettante intersezioni colle curve (coi punti) fondamentali dello spazio (y). Dunque avremo in questo caso

$$4(\mu - i) - 4 = 4(\mu - 1) - \kappa_i$$

ossia $\kappa_i = 4i$; il che significa:

Una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le superficie ϕ , ma non incontrata dalle curve S [in punti non fissi], è multipla secondo il numero $4i$ per la Jacobiana delle ϕ .

Se la detta curva è d'ordine i' , le corrisponde nello spazio (y) una curva d'ordine i , che è i' -pla per le φ e $4i'$ -pla per la Jacobiana delle φ .

10. Se due curve fondamentali dello spazio (x), rispettivamente multiple secondo i, j ($j \geq i$) per le ϕ , hanno un punto comune, a questo corrisponderà una curva spezzantesi in due C_i, C_{j-i} , la prima delle quali sarà comune alle due superficie che fanno parte della Jacobiana delle φ e corrispondono a quelle due curve fondamentali dello spazio (x) [89]. Come caso particolare se una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le ϕ , ha un punto doppio, a questo corrisponderà una curva C_i doppia per la superficie corrispondente a quella curva fondamentale.

11. Come si è già veduto, ad un punto I di una curva fondamentale dello spazio (x), che sia i-pla per tutte le superficie ϕ , corrisponde una curva razionale C_i d'ordine i . Se C_i giace tutta in un piano, a questo piano corrisponderà una ϕ , per la quale I è un punto $(i + 1)$ -plo. Infatti ad una retta condotta arbitrariamente per I corrisponderà una curva $C_{\mu-i}$ d'ordine $\mu - i$, la quale ha un punto comune con C_i , epperò incontrerà il piano di questa curva in altri $\mu - i - 1$ punti. Dunque la retta arbitraria per I sega in altri $\mu - i - 1$ punti la superficie ϕ corrispondente al piano di C_i ; vale a dire, per questa ϕ il punto I è multiplo secondo $\mu - (\mu - i - 1) = i + 1$.

*) NOETHER nei Math. Annalen, t. 2, p. 293; t. 3, p. 547.

Se $i = 1$, ai piani passanti per una retta C_1 corrispondono superficie ϕ per le quali I è un punto doppio. Se due rette analoghe a C_i giacciono in un piano, a questo corrisponderà una ϕ dotata di due punti doppi, ecc.

12. Analogamente si dimostra che, se le ϕ hanno una curva fondamentale i -pla e d'ordine i' , a ciascun punto della quale corrisponda una curva fissa *piana* (i' -pla per le φ e d'ordine i), al piano di questa curva corrisponderà una ϕ , per la quale la prima curva sarà multipla secondo $i + 1$.

13. Se le superficie φ hanno un punto (fondamentale) comune O , pel quale ciascuna curva R passi con r rami, ogni retta dello spazio (x) conterrà r punti corrispondenti ad O ; vale a dire, *ad O corrisponderà una superficie d'ordine r* . Od ancora: la superficie ϕ corrispondente a qualunque piano passante per O si spezzerà in due, l'una fissa e d'ordine r , l'altra variabile in una rete d'ordine $\mu - r$, proiettiva alla rete dei piani per O . Se il punto O assorbe r' condizioni per le curve R , quella superficie d'ordine r terrà luogo di una superficie d'ordine r' nella Jacobiana delle ϕ : cioè r' sarà un multiplo di r , e *la superficie d'ordine r , corrispondente ad O , dovrà essere contata $r': r$ volte nell'anzidetta Jacobiana*.

14. Per esempio: se O è un punto (semplice o) multiplo secondo un numero l per le φ , le quali però non abbiano ivi (un piano tangente o) un cono osculatore fisso, così che le r tangenti di qualsiasi curva R non siano soggette ad alcuna condizione, in tal caso è $r' = 2r$; onde la superficie d'ordine r corrispondente ad O è da contarsi *due* volte nella Jacobiana delle ϕ . Ad una sezione piana della superficie d'ordine r corrisponde la serie de' punti prossimi ad O e situati in una φ : la qual serie è proiettata da O mediante un cono d'ordine l . Dunque la superficie d'ordine r corrispondente ad O è omaloide, e le immagini delle sue sezioni piane sono curve d'ordine l .

15. Come secondo esempio: se O è un punto semplice per le φ , le quali ivi si tocchino con un contatto d'ordine $r - 1$, sarà $r' = (r + 1)r$; vale a dire, la superficie d'ordine r corrispondente ad O sarà compresa $r + 1$ volte nella Jacobiana delle ϕ .

16. Sia O un punto l -plo per le φ ed r -plo per le curve R . Siccome ciascuna ϕ corrispondente ad un piano per O si spezza in un luogo fisso d'ordine r ed in una superficie d'ordine $\mu - r$, così a qualunque retta uscente da O corrisponderà una curva S' , comune a infinite superficie d'ordine $\mu - r$, formanti un fascio. Le curve S' sono d'ordine $\nu - l$, giacchè questo è il numero delle ulteriori intersezioni di una φ con una retta per O ; e formano un sistema doppiamente infinito, perchè corrispondono alle rette che passano per un punto fisso. Una curva S' è dunque assoggettata a $4(\nu - l) - 2$ condizioni, cioè deve incontrare in $4(\nu - l) - 2$ punti l'insieme delle curve e dei punti fondamentali dello spazio (x). A questi punti corrisponderanno quelli ne' quali una retta condotta ad arbitrio per O incontra ulteriormente la Jacobiana delle φ . Perciò, se indichiamo con κ l'ordine di molteplicità del punto O per la detta Jacobiana, avremo

$$4(v-l)-2=4(v-1)-\kappa$$

donde

$$\kappa=4l-2;$$

cioè

Un punto fondamentale dello spazio (y) , l -plo per le φ , è multiplo secondo $4l-2$ per la Jacobiana delle φ *).

17. Dalle cose suesposte risulta che, se nello spazio (x) vi ha una curva fondamentale C_r d'ordine r ed i -pla per le ψ , ad essa corrisponde una superficie che fa parte della Jacobiana delle φ , e che sega ciascuna φ secondo curve fondamentali dello spazio (y) e secondo r curve d'ordine i , corrispondenti ai punti ne' quali C_r incontra un piano arbitrario nel primo spazio. Invece, la parte di Jacobiana delle φ che corrisponde (n.º 13) ad un punto fondamentale O dello spazio (x) non avrà con una φ qualsivoglia alcuna linea comune, oltre alle curve fondamentali dello spazio (y) , perchè un piano arbitrario dello spazio (x) non passa per O .

18. Una trasformazione razionale non può dirsi pienamente nota, se non si conoscono per ciascuno de' due spazi l'insieme delle curve e de' punti fondamentali, il sistema delle superficie omaloidi φ o ψ , e le parti della relativa Jacobiana. La trasformazione è definita quando è dato il sistema omaloidico {ad essa relativo} coll'insieme de' punti e delle linee fondamentali; le altre circostanze poi si determinano per mezzo de' teoremi or ora esposti.

Ora mi propongo di mostrare in qual modo si possano ottenere tutt'i sistemi omaloidici, de' quali faccia parte una superficie φ data.

19. Sia φ_4 una superficie omaloide di grado v , della quale si conosca una rappresentazione (punto per punto) sopra un piano Π . Tutte le altre superficie omaloidi d'ordine v , aventi gli stessi punti multipli e le stesse linee multiple di φ_4 , segheranno inoltre questa lungo curve le cui immagini in Π formeranno un certo sistema Σ . Assumasi poi in Π una rete omaloidica di curve K **), in modo che ciascuna di queste insieme con un luogo fisso L (un insieme di linee, anche contate più volte) costituisca una curva del sistema Σ . Una curva K_1 , formando insieme con L l'immagine dell'intersezione di φ_4 con un'altra superficie analoga φ_1 , individua un fascio $\varphi_4 + \alpha_1 \varphi_1$; analogamente, se K_2, K_3 sono due altre curve della rete, non appartenenti con K_1 ad uno stesso fascio, saranno individuati i fasci $\varphi_4 + \alpha_2 \varphi_2, \varphi_4 + \alpha_3 \varphi_3$; e siccome i tre fasci così ottenuti hanno una superficie comune φ_4 , così essi determinano un sistema lineare triplamente infinito

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0,$$

il quale è manifestamente omaloidico, epperò può servire di base ad una trasformazione

*) NOETHER, l. c.

**) Per la determinazione di queste reti e di tutto ciò che vi si appartiene, vedi la mia 2.^a Nota *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Bologna, 1865).

razionale d'ordine ν (n.º 3). Il grado delle ϕ , ossia il grado della trasformazione inversa, non è altro che l'ordine delle curve di φ_4 , aventi per immagini le K . Oltre ai punti ed alle curve multiple delle φ , sono *fondamentali* (cioè comuni a tutte le φ) quelle linee [o punti] di φ_4 che in Π sono rappresentate dal luogo L .

Variando il luogo L e la rete delle K in tutt'i modi possibili, si otterranno per tal guisa tutte le trasformazioni nelle quali può essere impiegata la data superficie φ_4 . [90]

20. Le K sono le immagini, in Π , di quelle curve R (n.º 4), che giacciono in φ_4 . Se una curva R si spezza, una delle curve parziali è comune alla Jacobiana delle φ (n.º 6); ma in tal caso, o si spezza anche la corrispondente K , o [91] questa passa con un ramo di più per uno de' punti fondamentali della rappresentazione Π . Nella prima ipotesi, una delle linee componenti fa parte della Jacobiana della rete delle K ; nell'altra ipotesi, il punto fondamentale nominato sarà precisamente l'immagine di quella parte di R che è comune a φ_4 ed alla Jacobiana delle φ . *Dunque [92] i punti fondamentali della rappresentazione Π e le curve costituenti la Jacobiana delle K formano insieme le immagini di quelle curve non fondamentali che sono comuni alla φ_4 ed alla Jacobiana delle φ , cioè di quelle curve che corrispondono alle intersezioni delle linee fondamentali dello spazio (x) col piano corrispondente a φ_4 .*

Perciò, se ai punti fondamentali di Π ed alle parti della Jacobiana delle K corrispondono, in φ_4 , l_1 rette, l_2 coniche, ..., l_r curve (razionali) d'ordine r , le superficie ϕ avranno in comune una curva semplice d'ordine l_1 , una curva doppia d'ordine l_2 , ..., una curva r -pla d'ordine l_r , ... Il genere di queste curve, il loro intersecarsi, o anche lo scindersi di alcuna di esse in parti sarà manifestato dagli analoghi accidenti dei diversi luoghi geometrici componenti la Jacobiana delle φ : e questi luoghi saranno tosto determinati quando si considerino le condizioni alle quali sono soggette le rette, le coniche, ... le curve (razionali) d'ordine r , ... corrispondenti ai punti fondamentali di Π ed alle linee della Jacobiana delle K .

Ma ad esplicitare il metodo, più di qualunque altra considerazione, gioverà la trattazione di qualche esempio: dove userò il simbolo (ν, μ) per esprimere due trasformazioni inverse, per le quali le φ, ϕ siano rispettivamente dell'ordine ν, μ .

Trasformazioni di 2.º grado.

$(\nu = 2; \mu = 2, 3, 4)$.

21. Sia φ_4 una superficie di 2.º grado; è noto *) che essa può essere rappresentata sopra un piano qualunque Π mediante raggi che proiettino i punti di φ_4 da un punto O fissato ad arbitrio in questa superficie. La rappresentazione ha due punti fondamentali 1, 2, che

*) CHASLES, *Théorie analytique des courbes de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, t. 53; décembre 1861).

corrispondono alle generatrici rettilinee di φ_4 incrociate in O , mentre la retta 12 è l'immagine di esso punto O . Le sezioni piane di φ_4 sono rappresentate dalle coniche 12 *); e il sistema Σ delle immagini delle intersezioni di φ_4 colle altre superficie di 2.º grado sarà per conseguenza formato dalle curve di 4.º ordine 1² 2² **).

Le K possono allora essere le rette del piano Π , purchè L sia un luogo di 3.º ordine 1² 2², cioè il sistema della retta 12 e di una conica 12. Il sistema omaloidico delle φ sarà adunque costituito dalle superficie di 2.º grado che hanno in comune un punto O ed una conica C . Le K , cioè le rette del piano Π , rappresentano coniche passanti per O e seganti C in due punti; le curve R sono adunque tutte le coniche dello spazio che passano pel punto fisso O e incontrano due volte la conica fissa C . La trasformazione inversa è per conseguenza di 2.º grado ($\mu = 2$).

Le K non hanno Jacobiana; ma ai punti fondamentali 1, 2 di Π corrispondono due rette, che passano per O e incontrano C ; dunque il cono che da O proietta la conica C fa parte della Jacobiana delle φ e corrisponderà ad una linea fondamentale C' dello spazio (x), d'ordine 2 e semplice per le ψ .

La Jacobiana delle φ dev'essere una superficie d'ordine 4, e per essa O e C debbono avere i gradi 2, 3 di molteplicità. Pel cono OC i gradi di molteplicità di O, C sono 2, 1; dunque la Jacobiana suddetta conterrà, oltre al cono OC , un luogo di 2.º ordine pel quale la C sia doppia. Siffatto luogo non può essere altro che il piano della conica C , contato due volte.

Ora questo piano non ha in comune con qualsivolgia φ alcuna linea, oltre la conica fondamentale C ; dunque il piano di C corrisponde ad un punto fondamentale O' dello spazio (x), semplice per le curve S .

Di qui segue che le ψ sono superficie di 2.º grado, aventi in comune un punto O' ed una conica C' ; vale a dire, il sistema omaloidico dello spazio (x) è affatto analogo a quello dello spazio (y).

22. Si soddisfarebbe ancora alle prescritte condizioni assumendo per L il sistema formato dalla retta 12 contata due volte e da una retta arbitraria. Allora si ottiene un caso particolare della trasformazione che precede: le φ (e così pure le ψ) sono superficie di 2.º grado che passano per una conica fissa C , ed hanno un piano tangente fisso in un punto O di essa conica ***).

Sì in questo particolare, sì nel caso generale considerato innanzi, la conica C (e per conseguenza anche C') può essere il sistema di due rette che si seghino.

*) Cioè dalle coniche passanti pei punti 1, 2.

**) Cioè dalle curve di 4.º ordine aventi due punti doppi fissi in 1, 2.

***). Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 e 23 marzo 1871 [Queste Opere, n. 88, 89].

Se il luogo L è costituito dalla retta 12 contata tre volte, tutte le superficie φ (ed analogamente le ϕ) hanno fra loro un contatto di 2.° ordine in O . La Jacobiana delle φ è allora formata dal piano, da contarsi quattro volte, che tocca in O tutte le φ ; e la conica C è un pajo di rette incrociate in O e contenute nel piano anzidetto.

23. Si giungerebbe alla medesima trasformazione (n.° 21) assumendo per le K le coniche descritte per 1, 2 e per un altro punto O fissato ad arbitrio nel piano Π ; nel qual caso L risulterebbe una conica 12. Se questa conica passa per O si ha il caso del n.° 22.

24. Per O si conducano i piani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; posto per brevità

$$p(y) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3,$$

$$q(y) = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3,$$

e indicata con $f(y)$ una forma quadratica omogenea delle y_1, y_2, y_3 , siano

$$p(y) + k y_4 = 0,$$

$$f(y) - q(y) y_4 = 0$$

le equazioni della conica C . Allora le formole (1) e (4) per tutt'i casi dell'attuale trasformazione si potranno scrivere così:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (p(y) + k y_4) y_1 : (p(y) + k y_4) y_2 : (p(y) + k y_4) y_3 : f(y) - y_4 q(y),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = (q(x) + k x_4) x_1 : (q(x) + k x_4) x_2 : (q(x) + k x_4) x_3 : f(x) - x_4 p(x).$$

La Jacobiana dello spazio (y) sarà

$$(p(y) + k y_4)^2 (k f(y) + p(y) q(y)) = 0,$$

ed analogamente quella dello spazio (x)

$$(q(x) + k x_4)^2 (k f(x) + p(x) q(x)) = 0.$$

Nel caso del n.° 21, cioè se la conica C non passa per O , si può porre $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $k = 1$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Se C è un pajo di rette, f sarà il prodotto di due fattori lineari. Quando f sia un quadrato perfetto, il sistema omaloidico dello spazio (y) è formato dai coni che passano per O e si toccano fra loro lungo una retta fissa, non passante per O ; analogamente per l'altro spazio.

Nel caso del n.° 22, cioè se C passa per O , dovremo porre $k = 0$. Se C è una conica propriamente detta, si può fare $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$, $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = 1$, $f(y) = y_3^2$. Invece, si potrà assumere f identicamente nulla, quando C sia un pajo di rette, una delle quali passi per O .

Da ultimo, se C consta di due rette incrociate in O , si potrà (oltre a $k = 0$) porre $p_1 = q_1 = 1$, $p_2 = p_3 = q_2 = q_3 = 0$, $f(y) = y_2 y_3$.

25. Le K siano coniche $1 O_1 O_2$ *); il luogo L essendo composto della retta 12 e di un'altra retta per 2 . Le φ saranno allora superficie di 2° grado aventi in comune una retta C e tre punti O, O_1, O_2 ; e la trasformazione inversa sarà di 3° grado ($\mu = 3$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono le cubiche gobbe (come quelle che sono rappresentate dalle K) che passano pei tre punti fissi $O O_1 O_2$ e incontrano due volte la retta C .

La Jacobiana delle φ è una superficie di 4° ordine, per la quale O, O_1, O_2 sono punti doppi e C è una retta tripla. Dunque ciascuna φ la segnerà inoltre secondo un luogo di 5° ordine. E infatti, la Jacobiana delle K , che è la terna delle rette $0_1 O_2, 1 O_1, 1 O_2$, rappresenta insieme col punto 2 , una conica e tre rette. Per conseguenza la Jacobiana delle φ comprende: 1° il luogo delle coniche passanti per $O O_1 O_2$ e seganti C ; 2° il luogo delle rette passanti per O_1 e seganti C ; 3° il luogo delle rette passanti per O_2 e seganti C ; 4° il luogo delle rette passanti per O e seganti C . Vale a dire: la Jacobiana delle φ è il sistema de' quattro piani $O O_1 O_2, OC, O_1 C, O_2 C$.

Dunque lo spazio (x) contiene una retta fondamentale doppia D' e tre rette fondamentali semplici G', G'_1, G'_2 .

Siccome ad una retta arbitraria nello spazio (x) corrisponde in (y) una cubica gobba passante per $O O_1 O_2$ e segante due volte C , e ad un punto della retta D' corrisponde una conica passante per $O O_1 O_2$ ed appoggiata in un punto a C , così ad una retta in (x) la quale incontri D' corrisponderà in (y) una retta appoggiata a C . Ora un piano qualsivoglia β in (y) contiene infinite rette appoggiate a C ; dunque la corrispondente superficie ϕ conterrà infinite rette appoggiate a D' . Vale a dire: le ϕ sono superficie gobbe di 3° grado, per le quali D' è la retta doppia, e le G' sono generatrici semplici.

Che le G' siano rette appoggiate alla D' , risulta anche dall'osservare che alla D' corrisponde un fascio di coniche nel piano $O O_1 O_2$ e ad una G' un fascio di rette nel piano OC , e che questi due fasci hanno una retta comune [⁹³]. Invece le G' a due a due non si segano, giacchè i fasci corrispondenti non hanno nulla di comune.

Ad una retta arbitraria nello spazio (y) corrisponderà l'ulteriore intersezione di due superficie ϕ , cioè una conica incontrata dalle quattro rette D', G' . Ma ad una retta appoggiata a C corrisponde una retta incontrata da D' ; dunque ai punti di C corrispondono le rette segate dalle G' , ossia alla retta fondamentale C corrisponde l'iperboloide $G' G'_1 G'_2$. Ciascuna superficie ϕ ha una direttrice non doppia; essa corrisponde al punto dove C incontra il piano β corrispondente a quella ϕ .

Le due generatrici di ϕ uscenti da un punto m' di D' corrispondono alle due rette comuni al piano β ed al cono che dal punto βC proietta la conica corrispondente ad m' : il qual cono corrisponde al piano delle due generatrici di ϕ . Fra le coniche passanti per

*) Cioè coniche passanti per 1 e per due altri punti fissi O_1, O_2 .

$O O_1 O_2$ ed incontrate da C ve ne sono due tangenti al piano β ; esse corrispondono ai due punti cuspidali di ψ .

La Jacobiana delle ψ dev'essere una superficie di 8.º ordine, passante tre volte per ciascuna G' e sette volte per la D' ; e dee comprendere due volte i piani corrispondenti ai tre punti $O O_1 O_2$. Di essa Jacobiana fa parte anche il luogo corrispondente a C , ossia l'iperboloide $G'G'_1G'_2$, il quale contiene una volta ciascuna delle quattro rette G' , D' ; dunque il sistema de' tre piani corrispondenti ai punti $O O_1 O_2$ dovrà contenere D' tre volte e ciascuna G' una volta. Questi piani sono per conseguenza $G'D'$, G'_1D' , G'_2D' .

Parecchi sono i casi particolari di questa trasformazione, i quali corrispondono al supporre i punti $O O_1 O_2$ tutti o in parte infinitamente vicini fra loro o alla retta C , ecc. Alla medesima trasformazione si giunge assumendo per le K le cubiche $1^2 2 O_1 O_2 O_3$, nel qual caso L è una retta per 2.

26. Questa trasformazione dà la rappresentazione di una superficie gobba ψ di 3.º grado sul corrispondente piano β *). Alle sezioni piane di ψ corrisponderanno le intersezioni di β colle φ , ossia le coniche passanti per un punto fisso (il punto βC), e seganti armonicamente un segmento fisso. Di quest'ultima condizione ci persuaderemo osservando che le φ segano il piano OO_1O_2 secondo un fascio di coniche, epperò segano la retta $(OO_1O_2)\beta$ in un'involuzione di punti. Image della retta doppia di φ sarà l'intersezione di β col piano OO_1O_2 che corrisponde a D' ; image della direttrice semplice è il punto βC . Le rette passanti per questo punto rappresentano le generatrici rettilinee di ψ .

27. Se il piano β passa pel punto nel quale la retta C incontra il piano OO_1O_2 , le due direttrici della superficie gobba corrispondente riescono infinitamente vicine **). La retta comune ai piani β , OO_1O_2 rappresenta la direttrice e una generatrice coincidente con essa. Le sezioni piane della superficie gobba ψ hanno per immagini le coniche che passano pel punto βC e sono ivi toccate da rette formanti un fascio proiettivo alla punteggiata che le coniche stesse determinano sulla image della direttrice (in modo che la retta $\beta(OO_1O_2)$ corrisponda al punto βC , che è l'immagine del punto cuspidale): infatti nel caso attuale, i punti della direttrice corrispondono proiettivamente alle generatrici che passano rispettivamente per essi.

28. Se la trasformazione in discorso si applica ad una superficie F' di 2.º grado, data comunque nello spazio (x), questa si muterà in una superficie di 4.º ordine F , giacchè le

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennaio 1867, p. 21 [Queste Opere, t. 2.º, pag. 393]; — CLEBSCH nel G. CRELLE-BORCHARDT, t. 67. pag. 17.

**) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennaio 1867, pag. 22 [Queste Opere, t. 2.º, pag. 394]; — CLEBSCH nel G. CRELLE-BORCHARDT, t. 67. p. 19.

intersezioni di questa con una retta arbitraria corrispondono ai punti comuni ad F' e ad una conica incontrante $D'G'G'_1G'_2$. Alle rette seganti C corrispondono le rette seganti D' ; e alle rette passanti per uno dei punti O corrispondono le rette appoggiate a due rette G' ; ma tutte queste rette incontrano F' in due punti, dunque anche quelle incontreranno in due punti la superficie F [fuori della C o dei punti O]; ossia F ha la retta doppia C e i punti doppi O, O_1, O_2 *).

Per ottenere la rappresentazione di F sopra un piano, basterà proiettare F' da un suo punto; le sezioni piane di F avranno allora per immagini le proiezioni delle intersezioni di F' colle ϕ , le quali proiezioni sono curve di 6.º ordine con due punti tripli (i punti fondamentali della rappresentazione di F'), due punti doppi (corrispondenti alle intersezioni di F' con D') e sei punti semplici (corrispondenti alle intersezioni di F' colle G'). Se ora su questo sistema di curve piane operiamo una trasformazione quadratica, mediante la rete delle coniche passanti per due punti tripli e per uno dei punti doppi, le curve di 6.º ordine si mutano in curve del 4.º ordine $0^2 1 2 3 4 5 6 7 8$ **). Siccome le quattro rette $D'G'G'_1G'_2$ formano tre piani $D'G'$, $D'G'_1$, $D'G'_2$, così nella prima rappresentazione (cioè nella proiezione di F') i sei punti semplici giacciono a due a due su tre coniche passanti per due punti tripli e per due punti doppi. Queste coniche si trasformano poi in rette; perciò nella rappresentazione definitiva avremo le tre rette $012, 034, 056$, immagini dei tre punti doppi O, O_1, O_2 . Alla retta C corrisponde nello spazio (x) l'iperboloide; $D'G'G'_1G'_2$, intersecante F' secondo una curva, la cui proiezione sarà del 4.º ordine, ma che si trasforma poi in una curva del 3.º ordine, contenente tutt'i punti $0 1 2 \dots 8$. Ad un punto di C in F corrisponde l'intersezione di F' con una generatrice del detto iperboloide; cioè ad un punto della retta doppia C corrispondono due punti coniugati nella cubica $012 \dots 8$. Siccome le generatrici dell'iperboloide incontrano tutte ^[94] la retta D' , così i due punti coniugati costituenti l'immagine di un punto di C sono sempre (nella proiezione di F') in una conica passante per due punti tripli ^[95] e per due punti doppi, la qual conica si trasforma poi in una linea retta: dunque le coppie di punti coniugati della cubica $012 \dots 8$ sono allineate con un punto fisso della cubica medesima. Nella retta doppia C vi sono quattro punti cuspidali, giacchè quattro sono le generatrici dell'iperboloide che sono tangenti a F' . Le immagini delle sezioni piane di F sono le curve di 4.º ordine che appartengono al sistema $0^2 12 \dots 8$ e segano la cubica $012 \dots 8$ in due punti coniugati. Il punto 0 e la retta 78 sono immagini di due coniche situate nel piano OO_1O_2 , e corrispondenti ai punti nei quali F' incontra D' . I punti $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ rappresentano tre coppie di rette contenute nei piani OC, O_1C, O_2C , le quali corrispondono alle

*) NOETHER nei Math. Annalen, t. 3, p. 50.

**) Cioè dotate di un punto doppio 0 e di otto punti semplici $1 2 \dots 8$.

intersezioni di F' colle tre rette G' ; i punti 7, 8 e le rette 07, 08 sono le immagini di altre quattro rette di F , corrispondenti alle generatrici rettilinee di F' incontrate da D' , ecc., ecc.

29. Se F' è tangente lungo una conica all'iperboloide $D'G'G'_1G'_2$, la corrispondente superficie F avrà la retta cuspidale C e i tre punti doppi $O \ O_1 \ O_2$. Nella proiezione di F' , l'immagine di C sarà una conica 123456, e le immagini delle sezioni piane di F saranno curve di 6.º ordine con due punti tripli 1, 2, con tre punti semplici di contatto 4, 5, 6 e con un altro punto singolare 3, equivalente a due punti doppi infinitamente vicini. Trasformando poi per mezzo della rete di coniche 123, le immagini delle sezioni piane divengono curve di 4.º ordine con due punti 1, 2 di semplice intersezione, con tre punti semplici di contatto 4, 5, 6 e con un punto doppio 3. I tre punti 4, 5, 6 sono in una retta, immagine della retta cuspidale.

30. Se nello spazio (y) è data una superficie quadrica F passante pei tre punti $O \ O_1 \ O_2$, ad essa corrisponderà in (x) una superficie F' di 3.º ordine. Infatti, alle rette dello spazio (x) corrispondono cubiche gobbe, le quali avendo già in comune con F i tre punti $O \ O_1 \ O_2$, la segano in altri tre punti. La superficie F' contiene: 1.º la retta D' , che corrisponde alla conica comune ad F e al piano OO_1O_2 ; 2.º le tre rette G' , che corrispondono alle tre coniche sezioni di F coi piani OC, O_1C, O_2C ; 3.º due altre rette appoggiate alle G' , le quali corrispondono ai punti in cui F è incontrata da C ; 4.º tre rette situate rispettivamente nei piani $D'G', D'G'_1, D'G'_2$ e corrispondenti ai punti O, O_1, O_2 ; 5.º altre sei rette, ciascuna appoggiata a due G' , corrispondenti alle generatrici di F che passano per un punto O ; 6.º altre quattro rette, appoggiate a D' , e corrispondenti alle generatrici di F che segano C ; 7.º sei rette corrispondenti alle coniche passanti per due punti O e per uno de' punti comuni a C e ad F ; 8.º due rette corrispondenti alle due cubiche gobbe che giacciono su F , passano pei tre punti O e segano C in due punti.

Proiettando F da un suo punto, si ottiene una rappresentazione piana di F' , nella quale le immagini delle sezioni piane sono curve di 4.º ordine con due punti doppi e cinque punti semplici fissi. Trasformando poi questo sistema di curve mediante la rete di coniche passanti pei due punti doppi e per uno de' punti semplici, si giunge alla rappresentazione d'ordine minimo della superficie di 3.º ordine *). Immagini delle sezioni piane sono allora le curve di 3.º ordine che passano per sei punti (fondamentali) fissi 1 2 3 4 5 6. Questi sei punti, le quindici rette 12, 13, ... e le sei coniche 12345, ... rappresentano le ventisette rette della superficie.

*) CLEBSCH, *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung* (G. CRELLE-BORCHARDT, t. 65, p. 359); — CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (id., t. 68, p. 82) [Questo volume, pag. 66].

31. Il sig. CAYLEY *) ha già dato le formole (1), (4) pel caso più generale della presente trasformazione:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1 (y_2 + y_4) : y_2 (y_1 + y_4),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : (x_1 - x_2) x_1 x_2 : (x_3 - x_4) x_1 x_2.$$

Nello spazio (y) , le superficie quàdriche φ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e i tre punti

$$(y_1 = y_3 = y_4 = 0), (y_2 = y_3 = y_4 = 0), (y_1 = y_2 = -y_4, y_3 = 0);$$

e nello spazio (x) le superficie cubiche ϕ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e le tre rette semplici

$$(x_1 = x_3 = 0), (x_2 = x_4 = 0), (x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0).$$

La Jacobiana del 1.^o spazio è $y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2) = 0$; quella del 2.^o

$$x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

Sono poi da notarsi i seguenti casi particolari:

$$1.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1 (y_4 - y_1) : y_2 y_4,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_4.$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$, e i punti $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, $(y_1 - y_4 = y_2 = y_3 = 0)$, nel primo de' quali toccano la retta $(y_3 = y_4 = 0)$. Le ϕ , oltre ad avere la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, si segano lungo la generatrice $(x_2 = x_4 = 0)$ e si toccano lungo l'altra generatrice $(x_1 = x_3 = 0)$.

La Jacobiana del 1.^o spazio è $y_1^2 y_2 y_3 = 0$; quella dell'altro

$$x_1^4 x_2^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

$$2.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_1 y_3 : y_1^2 + y_2 y_3,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_1^2 x_3 : x_1^3.$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e il punto $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, nel quale le loro sezioni fatte col piano $y_4 = 0$ hanno un contatto tripunto (e la tangente $y_3 = y_4 = 0$). Le ϕ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e si osculano lungo la generatrice $(x_1 = x_3 = 0)$.

Le Jacobiane dei due spazi sono $y_1^3 y_4 = 0$, $x_1^6 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0$.

*) Proceedings of the London Math. Society, t. 3, p. 171.

$$\begin{aligned} 3.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_4 (y_1 - y_2), \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= (x_2 - x_1) x_2 x_3 : (x_2 - x_1) x_3 x_1 : (x_2 - x_1) x_1 x_2 : x_1 x_2 x_4. \end{aligned}$$

Le φ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e pei punti $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$, e sono toccate nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ dal piano fisso $y_1 - y_2 = 0$. Le ψ , oltre alla retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, hanno in comune le tre generatrici $(x_1 = x_3 = 0)$, $(x_2 = x_3 = 0)$, $(x_1 - x_2 = x_4 = 0)$, le prime due delle quali concorrono sulla retta doppia.

Le Jacobiane sono $y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2) = 0$, $x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^3 x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 4.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1^2 : y_2 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= x_1 x_2 x_3 : x_2^2 x_3 : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_4. \end{aligned}$$

Le φ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$; oltre a ciò, nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ sono toccate dal piano $y_2 = 0$ e nel punto $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$ dalla retta $(y_3 = y_4 = 0)$. Le ψ hanno la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, sono toccate dal piano $x_3 = 0$ lungo la retta $(x_1 = x_3 = 0)$ e si segano in un'altra generatrice $(x_2 = x_4 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 y_3 = 0$, $x_1^4 x_2^3 x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 5.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_2^2 - y_1 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= x_2^2 x_3 : x_1 x_2 x_3 : x_1 x_2^2 : x_1 (x_1 x_3 - x_2 x_4). \end{aligned}$$

Le φ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e pel punto $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$, sono toccate nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ dal piano $y_1 = 0$, e in questo stesso punto le loro sezioni fatte con piani passanti per la retta $(y_1 = y_3 = 0)$ si osculano. Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e le generatrici $(x_1 = x_3 = 0)$, $(x_2 = x_3 = 0)$, che concorrono sulla retta doppia; e lungo la seconda delle dette generatrici hanno tutt'i piani tangenti comuni.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 y_3 = 0$, $x_1^2 x_2^5 x_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 6.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1^2 : y_2^2 - y_1 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= x_1^2 x_3 : x_1 x_2 x_3 : x_1^3 : x_2^2 x_3 - x_1^2 x_4. \end{aligned}$$

Le φ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e sono segate dal piano $y_3 = 0$ secondo coniche aventi un contatto quadripunto in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, dove il piano tangente comune è $y_1 = 0$. Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e si osculano lungo la retta $(x_1 = x_3 = 0)$, in tutt'i punti della quale il piano tangente è costante $(x_3 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^3 y_3 = 0$, $x_1^7 x_3 = 0$.

Nel caso generale, come anche ne' primi due casi particolari, il luogo delle direttrici semplici delle ψ è l'iperboloide $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$; negli ultimi quattro casi, il detto luogo si riduce al piano $x_3 = 0$. Ne' due casi che seguono, la direttrice semplice coincide colla retta doppia.

$$7.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 (y_1 - y_2) : y_2 (y_1 - y_2) : y_1 y_3 : y_2 y_4,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1^2 x_2 : x_1 x_2^2 : x_2 x_3 (x_1 - x_2) : x_1 x_4 (x_1 - x_2).$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ ed il punto $(y_1 = y_2, y_3 = y_4 = 0)$, e nei punti $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, $(y_1 = y_2 = y_4 = 0)$ sono toccate rispettivamente dai piani $y_2 = 0$, $y_1 = 0$. Le ϕ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, che ora fa anche le veci di una generatrice comune, e le due generatrici $(x_1 = x_3 = 0)$, $(x_2 = x_4 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1 y_2 (y_1 - y_2)^2 = 0$, $x_1^3 x_2^3 (x_1 - x_2)^2 = 0$.

$$8.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_4 : y_1 y_3 - y_2^2,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1^2 x_2 : x_1 x_2^2 : x_2 (x_1 x_4 + x_2^2 - x_1 x_3) : x_1^2 x_3.$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e i piani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ tangenti rispettivamente nei punti $(y_1 = y_2 = y_4 = 0)$, $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, e sono segate dai piani passanti per la retta $(y_1 = y_4 = 0)$ secondo coniche che si osculano nel punto $(y_1 = y_2 = y_4 = 0)$. Le ϕ hanno la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, che qui fa anche l'ufficio di una generatrice di contatto (così che essa conta per 6 nell'ordine dell'intersezione di due ϕ), e si segano inoltre nella generatrice $(x_2 = x_3 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^3 y_3 = 0$; $x_1^5 x_2^3 = 0$.

32. Questi casi particolari si deducono dal caso generale, supponendo:

1.^o che due de' tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini in una data retta $(y_3 = y_4 = 0)$;

2.^o che i tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini in un dato piano $y_4 = 0$;

3.^o che il punto O_1 sia infinitamente vicino alla retta C, determinando con essa un piano $y_1 - y_2 = 0$ (mentre i punti O_2, O_3 siano qualsivogliano);

4.^o che, oltre all'ipotesi 3.^a, i punti O_2, O_3 siano infinitamente vicini fra loro in una data retta $(y_3 = y_4 = 0)$;

5.^o che i punti O_1, O_2 siano infinitamente vicini fra loro in una data retta $(y_1 = y_3 = 0)$, ed anche infinitamente vicini alla retta C, colla quale determinino il piano $y_1 = 0$;

6.^o che, oltre all'ipotesi 5.^a, anche il punto O_3 sia infinitamente vicino agli altri due in un dato piano $y_3 = 0$;

7.^o che i punti O_1, O_2 , senza essere prossimi fra loro, siano infinitamente vicini alla retta C, determinando con essa rispettivamente i piani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$;

8.^o che, oltre all'ipotesi 7.^a, il punto O_3 si accosti infinitamente ad O_1 in una retta data $(y_1 = y_4 = 0)$.

33. Le K siano coniche per tre punti fissi $O_1 O_2 O_3$; il luogo L riducesi allora alla retta 12 contata due volte. Le φ sono superficie di 2.^o grado circoscritte ad un tetraedro fisso

$O O_1 O_2 O_3$, in un vertice O del quale hanno un piano tangente fisso ω . La trasformazione inversa è di 4.º grado ($\mu = 4$), giacchè alle rette dello spazio (x) corrispondono le curve gobbe di 4.º ordine, per le quali $O_1 O_2 O_3$ sono punti semplici ed O è un punto doppio colle tangenti nel piano fisso ω .

Lo spazio (y) non contiene curve fondamentali; e la Jacobiana delle φ dee segare la φ_4 secondo un luogo di 8.º ordine. Ora la Jacobiana delle K è la terna delle rette $O_2 O_3$, $O_3 O_1$, $O_1 O_2$ che rappresentano tre coniche; e i punti fondamentali 1, 2 rappresentano due rette, che insieme colle tre coniche costituiscono il predetto luogo di 8.º ordine. Dunque la Jacobiana delle φ comprende: 1.º il luogo delle coniche circoscritte al triangolo $O O_2 O_3$ e tangenti in O al piano ω ; 2.º il luogo delle coniche circoscritte al triangolo $O O_3 O_1$ e tangenti in O al piano ω ; 3.º il luogo delle coniche circoscritte al triangolo $O O_1 O_2$ e tangenti in O al piano ω ; 4.º il luogo delle rette passanti per O e contenute nel piano ω . Questi quattro luoghi sono ordinatamente i piani $O O_2 O_3$, $O O_3 O_1$, $O O_1 O_2$ ed ω ; l'insieme dei quali costituirà adunque la Jacobiana delle φ ; e ai piani medesimi corrisponderanno nello spazio (x) tre rette fondamentali doppie D'_1 , D'_2 , D'_3 ed una conica C' .

La retta comune a due de' tre piani $O O_2 O_3$, $O O_3 O_1$, $O O_1 O_2$ fa parte d'entrambi i fasci di coniche contenuti in essi piani; dunque le tre rette doppie dello spazio (x) a due a due hanno un punto comune. Ma le tre rette doppie non possono giacere in un solo e medesimo piano, perchè ad esso corrisponderebbe una superficie φ della quale farebbero parte i tre piani $O O_2 O_3$, $O O_3 O_1$, $O O_1 O_2$ (il che è assurdo, essendo le φ di 2.º grado); dunque le tre rette concorrono in uno stesso punto Q' .

La retta comune al piano ω e ad uno dei piani $O O_2 O_3$, $O O_3 O_1$, $O O_1 O_2$ fa parte sì del fascio di coniche contenute in questo piano, sì del fascio di rette contenute nel primo piano e incrociate in O ; dunque la conica C' incontra ciascuna delle rette D' .

Da tutto ciò segue che le ψ sono superficie (di STEINER) di 4.º ordine, per le quali Q' è un punto triplo, le D' sono rette doppie e C' è una conica semplice.

Le curve secondo le quali si segano ulteriormente le ψ a due a due, ossia le curve dello spazio (x) che corrispondono alle rette dello spazio (y) , sono coniche appoggiate in un punto a ciascuna delle linee D'_1 , D'_2 , D'_3 , C' .

La Jacobiana delle ψ dev'essere una superficie del 12.º ordine, per la quale ciascuna D' sia multipla secondo 7, e la C' sia tripla. D'altra parte, a ciascuno de' punti O_1 , O_2 , O_3 dee corrispondere un piano da contarsi due volte, e al punto O una superficie quàdrlica da contarsi tre volte nella Jacobiana delle ψ . Dunque ai punti $O_1 O_2 O_3 O$ corrispondono ordinatamente i piani $D'_2 D'_3$, $D'_3 D'_1$, $D'_1 D'_2$ e il cono quadrico $Q' C'$.

Si giunge alla medesima trasformazione, assumendo per le K le curve di 4.º ordine $1^2 2^2 0^2 O_1 O_2 O_3$; nel qual caso il luogo L scompare affatto. Anche qui si ottengono parecchi casi particolari, supponendo che alcuni de' punti $O O_1 O_2 O_3$ siano infinitamente vicini.

34. Da questa trasformazione si ricava tosto la rappresentazione di una superficie ϕ di STEINER sul corrispondente piano β *). Alle sezioni piane di ϕ corrispondono le intersezioni di β colle φ , vale a dire un sistema di coniche che incontrano in punti coniugati involutoriamente ciascuna delle rette, secondo le quali β sega i piani OO_2O_3 , OO_3O_1 , OO_1O_2 ; i punti doppi delle tre involuzioni sono i vertici di un quadrilatero completo. Ciascuna φ che tocchi il piano β lo sega secondo due rette; dunque ciascun piano tangente a ϕ sega questa superficie secondo due coniche. I lati del quadrilatero anzidetto sono le generatrici di contatto del piano β con quattro coni φ , ai quali corrispondono quattro piani, e ciascuno di questi tocca ϕ lungo una conica.

Ad una superficie di 2.^o grado situata comunque nello spazio (x) corrisponde in (y) una certa superficie di 4.^o ordine, per la quale $O_1 O_2 O_3$ sono punti doppi conici, ed O è un punto doppio uniplanare, nel quale il piano tangente sega la superficie secondo quattro rette. Io ho già studiato questa superficie altrove **).

In generale, ad una superficie d'ordine n , situata comunque nello spazio (x) , corrisponde in (y) una superficie d'ordine $2n$, per la quale $O_1 O_2 O_3$ sono punti n -pli conici, ed O è un punto n -plo uniplanare, dove il piano tangente ω sega la superficie secondo $2n$ rette (incrociate in O), così che la sezione fatta da un piano condotto arbitrariamente per O è una curva del genere $(n-1)^2$, per la quale O fa le veci di due punti n -pli infinitamente vicini. Se per la prima superficie il punto Q' , le rette D'_1, D'_2, D'_3 , e la conica C' sono multiple ordinatamente secondo i numeri q, q_1, q_2, q_3, c , la seconda superficie sarà dell'ordine $2n - (q_1 + q_2 + q_3 + c)$, e per essa i punti O, O_1, O_2, O_3 saranno multipli secondo i numeri $n + q - (q_1 + q_2 + q_3 + c), n - (q_2 + q_3), n - (q_3 + q_1), n - (q_1 + q_2)$; ecc. ecc.

35. Le formole (1) e (4) pel caso più generale della presente trasformazione sono ***):

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_4 (y_1 + y_2 + y_3), \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_2 x_3 : f(x) x_3 x_1 : f(x) x_1 x_2 : x_1 x_2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

dove per brevità si è posto $f(x) = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2$. Le superficie quadriche φ sono circoscritte al tetraedro formato dai piani $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ e sono toccate nel vertice ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) dal piano fisso $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Le ϕ sono superficie di 4.^o ordine, aventi in comune tre rette doppie (gli spigoli del triedro formato dai piani $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$), ed una conica ($x_4 = 0, f(x) = 0$).

Le Jacobiane dei due sistemi sono $y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2 + y_3) = 0, x_1^2 x_2^2 x_3^2 f^3(x) = 0$.

Notiamo poi i seguenti casi particolari:

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1867, p. 15. [Questo volume, pag. 389].
CLEBSCH nel G. CRELLE-BORCHARDT, t. 67, p. 1.

**) Memorie dell'Accad. di Bologna, serie 3.^a, t. 1.^o [Queste Opere, n. 94].

***) Ibid.

$$\begin{aligned} 1.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_3^2 - (y_1 + y_2) y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_2 x_3 : f(x) x_3 x_1 : f(x) x_1 x_2 : x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_3 x_4), \end{aligned}$$

dove $f(x) = (x_1 + x_2) x_3$. Le φ passano pei punti

$$(y_1 = y_2 = y_3 = 0), \quad (y_1 = y_3 = y_4 = 0), \quad (y_2 = y_3 = y_4 = 0),$$

nel primo de' quali esse hanno il piano tangente fisso $y_1 + y_2 = 0$ e le loro sezioni fatte con piani passanti per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ si osculano. Le ϕ sono ancora superficie di STEINER aventi in comune le tre rette doppie $(x_2 = x_3 = 0)$, $(x_3 = x_1 = 0)$, $(x_1 = x_2 = 0)$ ed una conica

$$(x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0),$$

la quale però è ora situata in un piano passante per una delle tre rette doppie.

Le Jacobiane sono $y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2) = 0$, $x_1^2 x_2^2 x_3^5 (x_1 + x_2)^3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_2 x_3 : f(x) x_3 x_1 : f(x) x_1 x_2 : x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1^2 (x_2^2 + x_3^2), \end{aligned}$$

dove $f(x) = x_2 x_3$. Le φ hanno di comune i punti

$$(y_1 = y_2 = y_3 = 0), \quad (y_2 = y_3 = y_4 = 0),$$

nel primo dei quali esse sono toccate dal piano fisso $y_1 = 0$ e le loro sezioni fatte con qualunque piano passante per una delle rette $(y_1 = y_2 = 0)$, $(y_1 = y_3 = 0)$ si osculano. Le ϕ sono ancora superficie di STEINER con tre rette doppie comuni $(x_2 = x_3 = 0)$, $(x_3 = x_1 = 0)$, $(x_1 = x_2 = 0)$; ma invece di passare per una stessa conica, hanno in comune tutt'i piani tangenti ne' punti di una retta doppia $(x_2 = x_3 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 y_3 = 0$, $x_1^2 x_2^5 x_3^5 = 0$.

$$\begin{aligned} 3.^{\circ} \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3 : y_4 (y_3 - y_2), \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_1 x_2 : f(x) x_2^2 : f(x) x_1 x_3 : x_1 x_2^2 x_4, \end{aligned}$$

dove $f(x) = x_1 x_3 - x_2^2$. Le φ hanno di comune i tre punti $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, $(y_1 = y_2 = y_4 = 0)$, $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, nel primo de' quali sono toccate dal piano $y_3 - y_2 = 0$, e nel secondo dalla retta $y_2 = y_4 = 0$. Le ϕ sono d'una forma degenerare della superficie di STEINER *), esse hanno in comune la retta $(x_1 = x_2 = 0)$ equivalente a due rette doppie infinitamente vicine, un'altra retta doppia $(x_2 = x_3 = 0)$ ed una conica $(x_4 = 0, f(x) = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 (y_3 - y_2) = 0$, $x_1^2 x_2^4 f(x) = 0$.

*) CLEBSCH nel G. CRELLE-BORCHARDT, t. 67, p. 15; — Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1867, p. 19 [Queste Opere, t. 2.º, pag. 392].

$$4.^{\circ} \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_2^2 : y_3^2 + y_1 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_1 x_3 : f(x) x_2 x_3 : f(x) x_2^2 : x_2^2 (x_3 x_4 - x_2^2), \end{aligned}$$

dove $f(x) = x_1 x_3$. Le φ passano pei punti $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$, nel primo de' quali sono toccate dal piano $y_1 = 0$, e nel secondo dalla retta $(y_3 = y_4 = 0)$; inoltre sono segate da ogni piano passante per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ secondo coniche che si osculano in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$. Le ψ sono della stessa forma degenerare della superficie di STEINER come nel caso precedente; hanno in comune le rette doppie $(y_2 = y_3 = 0)$, $(y_1 = y_4 = 0)$, la prima delle quali rappresenta due rette doppie infinitamente vicine, ed inoltre una conica $(x_1 = 0, x_3 x_4 - x_2^2 = 0)$, il cui piano passa per la seconda retta doppia.

Le Jacobiane sono $y_1 y_2^2 y_3 = 0$, $x_1^3 x_2^4 x_3^5 = 0$.

$$5.^{\circ} \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= y_1^2 : y_1 y_3 : y_3^2 - y_1 y_2 : y_2 y_4, \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= f(x) x_1^2 : f^2(x) : f(x) x_1 x_2 : x_1^3 x_4, \end{aligned}$$

dove $f(x) = x_2^2 - x_1 x_3$. Le φ hanno il punto comune $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ col piano tangente fisso $y_2 = 0$, ed un altro punto comune $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$ dove le sezioni fatte col piano $y_4 = 0$ si osculano tutte fra loro. Le ψ appartengono ad un'altra forma degenerare della superficie di STEINER *); hanno in comune la retta $x_1 = x_2 = 0$, che rappresenta tre rette doppie infinitamente vicine, ed inoltre la conica $(x_4 = 0, f(x) = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^3 y_2 = 0$, $x_1^5 f^3(x) = 0$.

36. Questi casi particolari risultano dal caso generale supponendo:

- 1.° che il punto O_1 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1 = y_2 = 0)$;
- 2.° che anche il punto O_2 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1 = y_3 = 0)$;
- 3.° che de' tre punti O_1, O_2, O_3 (ora non più supposti prossimi ad O) due siano infinitamente vicini fra loro nella retta $(y_2 = y_4 = 0)$;
- 4.° che il punto O_1 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1 = y_2 = 0)$, e che i punti O_2, O_3 siano prossimi fra loro nella retta $(y_3 = y_4 = 0)$;
- 5.° che i tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini fra loro nel piano $y_4 = 0$.

Trasformazioni di 3.° grado.

$$(\nu = 3; \mu = 2, 3, 4, \dots, 9). \quad [^{96}]$$

37. Sia φ_4 una superficie gobba di 3.° grado, la cui retta doppia indicherò con D . Abbiamo già veduto (n.° 26) che essa può essere rappresentata, punto per punto, in un piano

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1867, p. 20. [Queste Opere, t. 2°, p. 393].

II in modo che le immagini delle sue sezioni piane siano coniche passanti per un punto fisso 1 e seganti armonicamente un dato segmento. Per conseguenza, il sistema Σ delle immagini delle intersezioni di φ_4 colle altre superficie gobbe di 3.º grado, dotate della medesima retta doppia, sarà formato dalle curve di 4.º ordine 1^3 .

Assumendo per le K le rette del piano II, epperò per L il gruppo di tre rette passanti per 1, si ottiene la trasformazione ($\nu = 3$, $\mu = 2$), che abbiamo già esaminata precedentemente (n.º 25).

Le K siano coniche $1\,O_1O_2$, epperò L sia un pajo di rette uscenti da 1. Le φ saranno superficie gobbe di 3.º grado aventi in comune, oltre alla retta doppia D, due generatrici G_1 , G_2 e due punti O_1 , O_2 ; e la trasformazione inversa sarà di 3.º grado ($\mu = 3$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono cubiche gobbe R, le quali passano per O_1 , O_2 , segano due volte D ed una volta ciascuna delle G_1 , G_2 ; come si riconosce tosto dall'esame delle K, le quali sono le immagini di quelle curve R che giacciono in φ_4 .

La Jacobiana delle φ dev'essere un luogo dell'8.º ordine, pel quale D, G_1 , G_2 siano multiple secondo i numeri 7, 3, 3; esso avrà adunque con φ_4 un'altra linea comune dell'ordine $3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 4$. Questa è l'insieme di una conica e di due rette, rappresentate su II dalle rette O_1O_2 , 10_1 , 10_2 , che formano la Jacobiana delle K. Dunque la Jacobiana delle φ comprende: 1.º il luogo delle coniche passanti per O_1 , O_2 ed appoggiate alle rette D, G_1 , G_2 , vale a dire l'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$; 2.º il luogo delle rette che passano per O_1 e segano D, vale a dire il piano O_1D ; 3.º il luogo delle rette che passano per O_2 e segano D, vale a dire il piano O_2D . Questi tre luoghi sono da contarsi semplicemente nella Jacobiana delle φ , giacchè per questa i punti O_1 , O_2 sono soltanto doppi (n.º 16); dunque la Jacobiana medesima comprenderà inoltre un luogo del 4.º ordine, il quale, dovendo avere D come retta quadrupla e G_1 , G_2 come rette doppie, non può essere altro che il pajo di piani DG_1 , DG_2 , contati due volte.

Segue da ciò che gli enti fondamentali dello spazio (x) sono una retta doppia D' (corrispondente all'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$), due rette semplici G'_1 , G'_2 (corrispondenti ai piani O_1D , O_2D) e due punti semplici O'_1 , O'_2 (corrispondenti ai piani DG_1 , DG_2).

Le rette D', G'_1 hanno un punto comune, perchè la retta $[97]$ che passa per O_1 e incontra D e G_1 appartiene sì alle coniche corrispondenti ai punti di D', sì alle rette corrispondenti ai punti di G'_1 . Analogamente D' sega anche G'_2 . Da ciò segue senz'altro, che le ψ sono superficie gobbe di 3.º grado, aventi in comune la retta doppia D', le generatrici G'_1 , G'_2 , ed i punti O'_1 , O'_2 ; vale a dire, il sistema delle ψ è affatto analogo a quello delle φ .

Se assumiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 - a_1y_2 = 0$, $y_1 - a_2y_2 = 0$ come equazioni dei piani DO_1 , DO_2 , DG_1 , DG_2 ; ($y_3 = y_4 = 0$) come equazioni della retta O_1O_2 , ed $I(y) = 0$ come equazione dell'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$, le formole (1), (4) per l'attuale trasformazione saranno

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 I(y) : y_2 I(y) : (y_1 - a_1 y_2) (y_1 - a_2 y_2) y_3 : (y_1 - a_1 y_2) (y_1 - a_2 y_2) y_4,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 J(x) : x_2 J(x) : (a_2 - a_1) x_1 x_2 x_3 : (a_2 - a_1) x_1 x_2 x_4,$$

dove $J(x) = (x_1 - a_1 x_2) (x_1 - a_2 x_2) + (a_2 - a_1) x_1 x_2 - I(x)$. Le Jacobiane dei due spazi sono

$$I(y) y_1 y_2 (y_1 - a_1 y_2)^2 (y_1 - a_2 y_2)^2 = 0, \quad J(x) (x_1 - a_1 x_2) (x_1 - a_2 x_2) x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Si hanno casi particolari di questa trasformazione, quando facciansi ipotesi speciali sulla scambievole giacitura dei punti O_1, O_2 e delle rette D, G_1, G_2 . D'ora innanzi tralasceremo di considerare tali casi, che per sè non presentano difficoltà: tanto più che noi non abbiamo qui l'intenzione d'esaurire tutt'i casi possibili, ma solamente di presentare alcuni degli esempi più notabili.

38. Ritenuta la supposizione del n.º 37 per φ_4 , le K siano ora le cubiche $1^2 O_1 O_2 O_3 O_4$, ed L sia una retta per 1. Allora le φ saranno superficie gobbe di 3.º grado aventi in comune, oltre alla retta doppia D , una generatrice G e quattro punti O_1, O_2, O_3, O_4 ; e la trasformazione inversa sarà di 4.º grado ($\mu = 4$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe R di 4.º ordine (e 2.ª specie), che incontrano D in tre punti, G in un punto, e passano per quattro punti O .

La Jacobiana delle φ dev'essere dell'8.º ordine e contenere D sette volte e G tre volte; essa segnerà adunque φ_4 secondo un'altra linea dell'ordine $3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 = 7$, la quale è costituita da una cubica gobba e da quattro rette, rappresentate su Π dalla conica $10_1 O_2 O_3 O_4$ e dalle rette $10_1, 10_2, 10_3, 10_4$, che formano la Jacobiana delle K . Dunque la Jacobiana delle φ comprende: 1.º il luogo delle cubiche gobbe seganti D in due punti, G in un punto e passanti pei quattro punti O , vale a dire l'iperboloide $DGO_1 O_2 O_3 O_4$; 2.º i luoghi delle rette seganti D e passanti per un punto O , vale a dire i quattro piani DO_1, DO_2, DO_3, DO_4 . Questi cinque luoghi sono da contarsi semplicemente nella Jacobiana delle φ , perchè in questa i punti O non sono che doppi; dunque la Jacobiana che si considera comprenderà anche un luogo di 2.º ordine, pel quale D e G siano doppie; il qual luogo sarà pertanto il piano DG contato due volte.

Di qui consegue che gli enti fondamentali dello spazio (x) sono una retta tripla D' (corrispondente all'iperboloide $DGO_1 O_2 O_3 O_4$), quattro rette semplici G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 (corrispondenti ai quattro piani DO), ed un punto O' (corrispondente al piano DG).

La retta D' incontra ciascuna retta G'_r , perchè la retta $[^{98}]$ che passa per O_r e si appoggia a D, G , appartiene sì alle cubiche corrispondenti ai punti di D' , sì alle rette corrispondenti ai punti di G'_r .

Le ψ sono adunque superficie gobbe di 4.º grado, che hanno in comune la retta tripla D' , le quattro generatrici G' ed il punto O' .

La Jacobiana delle ϕ comprenderà: 1.° quattro piani, da contarsi due volte, corrispondenti ai quattro punti O , e seganti ciascuna ϕ esclusivamente nelle linee fondamentali: essi sono i quattro piani $D'G'$; 2.° un luogo di rette corrispondenti ai punti di G , il qual luogo dev'essere un piano, perchè G ha con ciascuna R un solo punto comune, e deve segare ciascuna ϕ secondo una retta, ond'esso sarà il piano $D'O'$; 3.° un luogo di coniche corrispondenti ai punti di D , il qual luogo sarà di 3.° ordine, perchè D ha con ciascuna R tre punti comuni. Siccome la Jacobiana completa è dell'ordine 12 e contiene D' , G' , O' risp. 11, 3, 2 volte, così il luogo di 3.° ordine conterrà D' , G' , O' risp. 2, 1, 1 volta, vale a dire, esso sarà la superficie gobba di 3.° grado, che è determinata dalla retta doppia D' , dalle quattro generatrici G' , e dal punto O' . Le coniche (corrispondenti ai punti di D) secondo le quali la detta superficie di 3.° grado interseca le ϕ , sono appoggiate alle cinque rette D' , G' e passano pel punto O' .

Se si rappresentano i piani DG , DO_1 , DO_2 , DO_3 , DO_4 , $O_1O_2O_3$, $O_1O_2O_4$ e l'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$ colle equazioni.

$y_1 - y_2 = 0$, $y_1 - a_1 y_2 = 0$, $y_1 - a_2 y_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $I(y) = 0$,
dove

$$I(y) = (y_1 - a_1 y_2)(y_1 - a_2 y_2) + a y_1 y_3 + b y_1 y_4 + c y_2 y_3 + d y_2 y_4,$$

le formole (1), (4) per l'attuale trasformazione saranno

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 I(y) : y_2 I(y) : y_2 y_3 (y_1 - y_2) : y_1 y_4 (y_1 - y_2),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 J(x) : x_2 J(x) : f(x) x_1 x_3 : f(x) x_2 x_4,$$

dove $f(x) = (x_1 - a_1 x_2)(x_1 - a_2 x_2)$, e

$$J(x) = -(a x_1^2 x_3 + b x_1 x_2 x_4 + c x_1 x_2 x_3 + d x_2^2 x_4) + (x_1 - x_2) x_1 x_2.$$

Le Jacobiane dei due spazi sono ordinatamente

$$I(y) (y_1 - a_1 y_2) (y_1 - a_2 y_2) y_1 y_2 (y_1 - y_2)^2 = 0,$$

$$J(x) (x_1 - x_2) (x_1 - a_1 x_2)^2 (x_1 - a_2 x_2)^2 x_1^2 x_2^2 = 0.$$

39. La trasformazione qui trattata somministra la rappresentazione, punto per punto, di una superficie ϕ sul corrispondente piano β *). Come già si è notato, ϕ è gobba e di 4.° grado, ed è dotata di una retta tripla D' . Immagini delle sue sezioni piane saranno le tracce delle φ su β , epperò saranno curve H di 3.° ordine, aventi in comune un punto doppio d (traccia di D) ed un punto semplice g (traccia di G). Ai piani per O' corrispondono gli iper-

*) Cfr. NOETHER nei Mathem. Annalen, t. 3.

boloidi $DO_1O_2O_3O_4$, i quali segano ciascuno dei piani $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$, $O_1O_2O_3$ secondo fasci di coniche; dunque le tracce di questi iperboloidi su β costituiranno una rete di coniche k (passanti per d) seganti in un'involuzione di punti ciascuna delle quattro rette tracce de' piani anzidetti. Fra le coniche k ve ne sono infinite che si spezzano in due rette, l'una delle quali passa per d , mentre l'altra tocca una conica fissa P . Ecco adunque come si può costruire la rappresentazione di ϕ .

Assumansi ad arbitrio i punti d, g , quattro rette $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ (passanti per d), come tracce de' piani O_1D, O_2D, O_3D, O_4D , e tre altre rette $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (non passanti per d), come tracce de' piani $O_2O_3O_4, O_1O_3O_4, O_1O_2O_4$. Le coppie di rette $\delta_1\omega_1, \delta_2\omega_2, \delta_3\omega_3$ determinano la rete delle coniche k . Congiungasi il punto $\delta_1\omega_2$ col punto $\delta_2\omega_1$; il punto $\delta_1\omega_3$ col punto $\delta_3\omega_1$; il punto $\delta_2\omega_3$ col punto $\delta_3\omega_2$; le tre congiungenti e le $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ toccano una conica stessa P . Stabiliscasi una corrispondenza anarmonica fra le tangenti di P e le rette per d , in modo che le $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ corrispondano alle $\delta_1, \delta_2, \delta_3$; e sia ω_4 quella tangente di P che corrisponde a δ_4 : sarà ω_4 la traccia del piano $O_1O_2O_3$; e ciascuna delle quattro rette ω sarà segata dalle coniche k in un'involuzione di punti.

Fra le coniche k che passano per g se ne scelga una, I , come traccia dell'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$, cioè come immagine della retta tripla D' . Le coniche k determinano su I una involuzione cubica di punti, così che ogni gruppo o terna di punti è l'immagine di un punto unico di D' ; vale a dire, qualunque cubica H , passante per un punto di I , passa anche per gli altri due punti della medesima terna. In ciò consistono le condizioni alle quali sono soggette le H , e che provengono dal fatto che le φ passano pei quattro punti O . I punti coniugati in uno stesso gruppo dell'involuzione cubica sono i vertici di un triangolo inscritto in I e circoscritto a P .

Le rette per D sono le immagini delle generatrici rettilinee di ϕ ; ma la retta dg , traccia del piano DG , non corrisponde che al punto O' ; la generatrice che passa per O' ha per immagine il punto g . Il punto d rappresenta la conica secondo la quale ϕ è intersecata dalla superficie gobba di 3.º grado $D^2G_1G_2G_3G_4O'$. Le coniche per d, g e per due punti di uno stesso gruppo dell'involuzione sono le immagini delle cubiche di ϕ , situate nei piani tangenti. Le rette per g rappresentano le coniche, secondo le quali ϕ è segata dai suoi piani bitangenti; quella di queste coniche che passa per O' ha per immagine il punto d .

La rete delle coniche k rappresenta, come già si è veduto, le sezioni fatte in ϕ dai piani passanti per O' ; donde segue che le tangenti di P sono le immagini delle cubiche di ϕ , situate nei piani tangenti che escono da O' . Questi piani inviluppano un cono circoscritto di 4.º ordine, che tocca ϕ lungo una curva di 5.º ordine (la cui immagine è una cubica d^2 , Hessiana della rete delle k) e sega la stessa ϕ lungo una curva di 6.º ordine, la immagine della quale è la conica P , che insieme col punto d costituisce la curva Cayleyana della rete già nominata.

Sia m uno dei punti comuni alle coniche I, P ; la retta tangente in m a P seghi di nuovo I

in m' ; la tangente in m' ad I toccherà allora anche P . I tre punti $m m' m'$ formano un gruppo dell'involuzione, vale a dire, i quattro punti m' sono i punti doppi dell'involuzione. La retta tripla D' contiene perciò quattro punti cuspidali, corrispondenti ai quattro gruppi analoghi ad $m m' m'$.

40. Conservata ancora la medesima superficie φ_4 , suppongasi ora che le K siano le curve di 4.° ordine $1^3 0_1 0_2 0_3 0_4 0_5 0_6$; il luogo L scompare del tutto. Le φ sono superficie gobbe di 3.° grado, che, oltre alla retta doppia D , hanno in comune sei punti $O_1, O_2, \dots, O_6$ fissi, e la trasformazione inversa è di 5.° grado ($\mu = 5$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe R di 5.° ordine, che incontrano D in quattro punti e passano per i sei punti dati.

La Jacobiana delle φ e la φ_4 devono avere in comune, oltre a D , una linea dell'ordine $3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 10$, la quale è composta di una curva gobba di 4.° ordine e di sei rette rappresentate su Π dalla cubica $1^2 0_1 0_2 \dots O_6$, e dalle rette $10_1, \dots, 10_6$, che costituiscono la Jacobiana delle K . Dunque la Jacobiana delle φ comprende: 1.° il luogo delle curve gobbe di 4.° ordine che segano D tre volte e passano per i sei punti dati, vale a dire l'iperboloide $DO_1 O_2 \dots O_6$; 2.° i luoghi delle rette che segano D e passano per un punto O , vale a dire i sei piani $DO_1, DO_2, \dots, DO_6$.

Di qui segue che le ψ sono superficie gobbe di 5.° grado, aventi in comune una retta quadrupla D' (corrispondente all'iperboloide $DO_1 \dots$) e sei generatrici $G'_1, G'_2, \dots, G'_6$ (corrispondenti ai sei piani DO). La Jacobiana delle ψ consta dei sei piani $D'G'$, da contarsi due volte, e della superficie gobba di 4.° grado $D'^3 G'_1 G'_2 \dots G'_6$, che è il luogo delle coniche appoggiate alle sette rette D', G' .

Rappresentiamo nello spazio (y) colle equazioni $I(y) = 0, H_1(y) = 0, H_2(y) = 0, y_1 - a_1 y_2 = 0, y_1 - a_2 y_2 = 0, y_1 - a_3 y_2 = 0, y_1 - a_4 y_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ l'iperboloide $DO_1 O_2 O_3 O_4 O_5 O_6$, uno degli iperboloidi $DO_2 O_3 O_4 O_5 O_6$, un iperboloide $DO_1 O_3 O_4 O_5 O_6$, ed i piani $DO_1, DO_2, DO_3, DO_4, DO_5, DO_6, O_1 O_2 O_3, O_4 O_5 O_6$; e nello spazio (x) rappresentiamo colle equazioni $J(x) = 0, M(x) = 0, N(x) = 0, x_1 - a_1 x_2 = 0, x_1 - a_2 x_2 = 0, x_1 - a_3 x_2 = 0, x_1 - a_4 x_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ la superficie di 4.° grado $D'^3 G'_1 G'_2 G'_3 G'_4 G'_5 G'_6$, l'iperboloide $D'G'_4 G'_5 G'_6$, l'iperboloide $D'G'_1 G'_2 G'_3$, i piani $D'G'_1, D'G'_2, D'G'_3, D'G'_4, D'G'_5, D'G'_6$, un piano per G'_1 , ed un piano per G'_2 ; allora le formole (1), (4) per la trasformazione attuale saranno:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 I(y) : y_2 I(y) : (y_1 - a_1 y_2) H_1(y) : (y_1 - a_2 y_2) H_2(y),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 J(x) : x_2 J(x) : (x_1 - a_1 x_2) (x_1 - a_2 x_2) (x_1 - a_3 x_2) M(x) : (x_1 - a_4 x_2) x_1 x_2 N(x).$$

Le Jacobiane de' due spazi sono

$$I(y) (y_1 - a_1 y_2) (y_1 - a_2 y_2) (y_1 - a_3 y_2) (y_1 - a_4 y_2) y_1 y_2 = 0,$$

$$J(x) (x_1 - a_1 x_2)^2 (x_1 - a_2 x_2)^2 (x_1 - a_3 x_2)^2 (x_1 - a_4 x_2)^2 x_1^2 x_2^2 = 0.$$

41. Questa trasformazione dà la rappresentazione di una superficie ϕ (gobba, di 5.º grado, dotata di una retta quadrupla D') sul corrispondente piano β *). Assumansi in questo piano: un punto d , come traccia di D ; tre coniche I, H_1, H_2 , come tracce degli iperboloidi $I(y) = 0, H_1(y) = 0, H_2(y) = 0$; e quattro rette g_1, g_2, g_5, g_6 come tracce dei piani $y_1 - a_1 y_2 = 0, y_1 - a_2 y_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0$. Queste rette saranno le immagini delle generatrici G'_1, G'_2, G'_5, G'_6 ; la conica I rappresenterà la retta quadrupla D' ; e le coniche H_1, H_2 le sezioni fatte in ϕ dai piani $x_3 = 0, x_4 = 0$. Le immagini delle sezioni piane di ϕ saranno tutte le curve h di 3.º ordine del sistema lineare, triplamente infinito, determinato dai quattro luoghi $g_5 I, g_6 I, g_1 H_1, g_2 H_2$. Siano $i_1 i_2 i_3 i_4, i'_1 i'_2 i'_3 i'_4$ i punti nei quali la conica I è risp. segata dai due luoghi $g_1 H_1, g_2 H_2$; questi due gruppi di quattro punti individuano su I un'involuzione biquadratica; e qualunque curva h (immagine d'una sezione piana di ϕ) segnerà I in quattro punti (oltre a d) appartenenti ad uno stesso gruppo dell'involuzione. Ciascun gruppo dell'involuzione costituisce l'immagine di un punto della retta quadrupla D' . Una involuzione biquadratica ha sei punti doppi, dunque D' ha sei punti cuspidali, vale a dire sei punti, in ciascuno dei quali due delle quattro generatrici ivi incrociate sono coincidenti.

Le rette per d sono le immagini delle generatrici rettilinee; ogni conica passante per d e per tre punti dello stesso gruppo dell'involuzione rappresenta la curva di 4.º ordine, che risulta dal segare ϕ con un piano tangente; ed ogni retta tirata fra due punti di uno stesso gruppo è tangente ad una curva fissa di 3.ª classe e rappresenta la curva di 3.º ordine, comune a ϕ e ad un piano bitangente. La superficie ϕ contiene una sola conica, rappresentata dal punto d e situata eziandio nella superficie $J(x) = 0$.

(Continua) [99]

*) Cfr. NOETHER, l. c.